UPMC, Master 1 Mathématiques, année 2014-2015
UE 4M046: Equations aux Dérivées Partielles

Corrigé TD 1

I. Généralités sur les EDO

Exercice 1

1. *Pour chacun des problèmes de Cauchy, justifier l'existence d'une unique solution maximale et déterminer son intervalle de définition.*

(a) L'équation $x' = 4 + x$ est de la forme $x' = f(x)$ avec $f(x) = 4 + x$. Comme f est une fonction globalement lipschitzienne (affine) sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour chaque donnée initiale, il existe une unique solution maximale, et cette solution est définie globalement d'après le corollaire 2.1.15 du poly PDE.

Nous pouvons expliciter les solutions de cette équation, car c'est une équation linéaire du premier ordre. D'abord, les solutions de l'équation homogène $x' = x$ sont les fonctions qui à $t \in \mathbb{R}$ associent Ce^t, avec $C \in \mathbb{R}$. On applique ensuite la méthode de variation de la constante pour obtenir les solutions de l'équation complète: posons $x(t) = C(t)e^t$ et remplaçons dans l'équation,

$$C'(t)e^t + C(t)e^t = 4 + C(t)e^t \quad \Rightarrow \quad C'(t) = 4e^{-t}.$$

D'où, $x(t) = Ke^t - 4$. La solution qui vérifie $x(0) = 1$ est celle où on pose $K = 5$. On retrouve bien que la solution est globale.

(b) L'équation $x' = x^{\frac{8}{3}}$ est de la forme $x' = f(x)$ avec $f(x) = x^{\frac{8}{3}}$. Comme $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction localement lipschitzienne, pour chaque donnée initiale positive, il existe une unique solution maximale, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Remarquons que la fonction identiquement nulle est solution de l'équation. Pour trouver les solutions à donnée initiale strictement positive, on procède par séparation des variables: on a

$$\frac{x'}{x^{\frac{8}{3}}} = \frac{-3}{5}\frac{d}{dt}(x^{\frac{-5}{3}}) = 1,$$

soit $\frac{-3}{5}x^{-5/3} = t + K$. Ainsi, les solutions positives de l'équation $x' = x^{\frac{8}{3}}$ sont les fonctions de la forme

$$x(t) = \left(\frac{-3}{5(t+K)}\right)^{\frac{3}{5}},$$

avec $K < 0$ (sinon $x(0) \leq 0$). Les solutions sont alors définies sur $]-\infty, -K[$. Pour que $x(0) = 1$, on pose $K = \frac{-3}{5}$.

(c) L'équation $x' = \cos x$ est de la forme $x' = f(x)$ avec $f(x) = \cos(x)$. On remarque que $f'(x) = -\sin(x)$ est bornée, ainsi f est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz et le corollaire 2.1.15 du poly, pour toute donnée initiale, il existe une unique solution maximale qui est globalement définie.

Résolvons cette équation. On remarque qu'il existe des solutions constantes: $x(t) \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ceci est consistent avec le fait que les solutions sont globales, puisque toute solution à donnée comprise entre $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$ va rester dans ce même intervalle, niant ainsi le critère d'explosion (corollaire 2.1.14 du poly).

Pour résoudre l'équation, nous procédons à nouveau par séparation des variables, et un peu de trigonométrie et une décomposition en éléments simples nous permettra de retomber sur nos pattes. Lorsque $x(0) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\frac{x'}{\cos(x)} &= \frac{\cos(x)x'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)x'}{1-\sin^2(x)} \\
&= \frac{1}{2}(\sin(x))'\left(\frac{1}{1+\sin(x)} + \frac{1}{1-\sin(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}(\ln(1+\sin(x))) - \frac{d}{dt}(\ln(1-\sin(x)))\right) = 1.
\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right) = t + K$. On manipule cette expression pour obtenir

$$\sin(x(t)) = \frac{e^{2(t+K)} - 1}{e^{2(t+K)} + 1} := g(t+K),$$

soit $x(t) = \arcsin((-1)^k g(t+K)) + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $K \in \mathbb{R}$ à choisir en fonction de la donnée initiale. Pour la donnée initiale $x(0) = 2 \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on a $k = 1$. Le calcul de K est laissé. Le lecteur pourra aussi vérifier que toutes les expressions données ici sont bien définies (par exemple, que $1 + \sin(x) > 0$, et que $g(t+K) \in]-1, 1[$).

2. *On considère l'équation $x' = 3x^{2/3}$ avec la condition initiale $x(0) = 0$.*

(a) *Soit φ une telle solution définie sur $\mathbb{R}$. On pose $\lambda = \inf\{t \leq 0 \mid \varphi(t) = 0\} \geq -\infty$ et $\mu = \sup\{t \geq 0 \mid \varphi(t) = 0\} \leq +\infty$. Montrer que φ est identiquement nulle sur (λ, μ).*

Supposons que $\varphi(t_0) = c_0 > 0$. La fonction $x \mapsto 3x^{2/3}$ est localement lipschitzienne sur $]0, +\infty[$, ainsi l'équation $x' = x^{2/3}$ admet une unique solution au voisinage de t_0, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Cette solution se calcule par séparation des variables:

$$\frac{\varphi'}{3\varphi^{2/3}} = \frac{d}{dt}(\varphi^{1/3}) = 1,$$

soit $\varphi(t) = (t - t_0 + c_0^{1/3})^3$. Cette fonction est définie et croissante sur $[t_0, +\infty[$, ainsi la solution x ne s'annule pas sur cet intervalle: on doit avoir $\mu < t_0$.

De la même façon, on montre que, si $c_0 < 0$, alors $t_0 < \lambda$. Ainsi, φ ne peut pas être non nulle entre λ et μ.

(b) *Montrer que φ vaut $(t-\lambda)^3$ si $t \le \lambda$, 0 sur $[\lambda, \mu]$ et $(t-\mu)^3$ si $t \ge \mu$; en déduire toutes les solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ avec $x(0) = 0$.*

D'après la question (a), toute solution continue du problème avec $x(0) = 0$ doit satisfaire $x(t) = 0$ sur $[\lambda, \mu]$. Pour $t > \mu$, la solution est une fonction cubique telle que $x(\mu) = 0$, soit $x(t) = (t-\mu)^3$.

Pour $t \le 0$, on utilise la convention que $t \mapsto t^{1/3}$, la réciproque de la fonction $t \mapsto t^3$, est définie sur $\mathbb{R}$, et donc que, pour tout t, $t^{2/3}$ est positif. Ainsi, on trouve de la même manière que $x(t) = (t-\lambda)^3$ pour $t < \lambda$ (solution croissante).

On montre ainsi que le problème $x' = 3|x|^{\frac{2}{3}}$ avec $x(0) = 0$, pour lequel le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas, admet une infinité de solutions. On les construit comme ci-dessus en choisissant les valeurs de $-\infty \le \lambda \le 0$ et de $0 \le \mu \le +\infty$ arbitrairement.

Exercice 2 *Formule de Duhamel*

On considère l'équation $x' = a(t)x + f(t)$ avec la condition $x(t_0) = x_0$, où a et f sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit

$$y(t) = x(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}.$$

Trouver l'équation que vérifie y et en déduire son expression. Montrer ensuite que

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\ ds} + \int_{t_0}^t f(s) e^{\int_s^t a(\sigma)\ d\sigma}\ ds.$$

Soit x la solution maximale de ce problème (pourquoi existe-t-elle et pourquoi est-elle unique?). La fonction y est de classe $\mathcal{C}^1$ car x et $\int_{t_0}^t a(s)\ ds$, en tant que primitive d'une fonction continue, le sont. Dérivons:

$$\begin{aligned} y'(t) &= x'(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds} - x(t)a(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds} \\ &= f(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds}. \end{aligned}$$

Comme y est une primitive de cette fonction, avec $y(t_0) = x_0$,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\ ds} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s)e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)\ d\sigma}\ ds, \\ \text{d'où } x(t) &= x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\ ds} + \int_{t_0}^t f(s)e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)\ d\sigma - \int_{t_0}^s a(\sigma)\ d\sigma}\ ds \\ &= x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\ ds} + \int_{t_0}^t f(s)e^{\int_s^t a(\sigma)\ d\sigma}. \end{aligned}$$

Exercice 3 *Lemme de Grönwall intégral*

Soit $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^+)$ telle qu'il existe a, $c \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^+)$ de sorte que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$u(t) \le c(t) + \int_0^t a(s)u(s)\ ds.$$

1. *Montrer que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma}\, ds.$$

La fonction $v = \int_0^t a(s)u(s)\; ds$ est une primitive de au. Alors, a étant positive,

$$v'(t) = a(t)u(t) \leq a(t)\left(c(t) + \int_0^t a(s)u(s)\; ds\right) = a(t)c(t) + a(t)v(t).$$

D'après le lemme de Grönwall du cours (lemme 2.1.3), on a alors

$$\begin{aligned} v(t) &\leq v(0)e^{\int_0^t a(s)\; ds} + \int_0^t a(s)c(s)e^{\int_s^t a(\sigma)\; d\sigma}\; ds \\ &\leq \int_0^t a(s)c(s)e^{\int_s^t a(\sigma)\; d\sigma}\; ds, \end{aligned}$$

vu que $v(0) = 0$. Il suffit à présent de remplacer $v(t)$ par son majorant dans l'inégalité sur $u(t)$.

2. *Si, de plus, c est constante, montrer que $u(t) \leq ce^{\int_0^t a(s)\; ds}$.*

Prenons c constante dans l'inégalité montrée à la question précédente: alors,

$$u(t) \leq c + c\int_0^t a(s)e^{\int_s^t a(\sigma)\; d\sigma}\; ds.$$

On reconnaît sous l'intégrale la dérivée de la fonction $s \mapsto -e^{\int_s^t a(\sigma)\; d\sigma}$, ainsi

$$u(t) \leq c + c[-e^{\int_s^t a(\sigma)\; d\sigma}]_0^t = c - c + ce^{\int_0^t a(s)\; ds}.$$

Exercice 4

Soit l'équation différentielle

$$x''' - xx'' = 0 \quad . \tag{1}$$

où x est une application trois fois dérivable, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *Mettre cette équation différentielle sous la forme canonique $y'(t) = f(t, y(t))$, où f est une application que l'on déterminera.*

On pose $y(t) = (x(t), x'(t), x''(t))$, et on a immédiatement que:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ xx'' \end{pmatrix}.$$

Ainsi $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1x_3)$.

2. *Soient t_0, a, b, $c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de l'équation (1) qui satisfasse aux conditions initiales*

$$\varphi(t_0) = a \quad , \quad \varphi'(t_0) = b \ \text{ et } \ \varphi''(t_0) = c.$$

Chaque composante de l'application f est polynomiale, donc f est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^3$. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy $y' = f(y)$ avec la condition $y(0) = (a, b, c)$ admet une unique solution maximale.

3. *Soit φ une telle solution maximale. Calculer la dérivée de la fonction*

$$t \mapsto \varphi''(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\ ds\right) .$$

En déduire que la fonction φ est soit convexe, soit concave sur son intervalle de définition. Déterminer φ dans le cas où $\varphi''(t_0) = 0$.

Notons $\psi(t) = \varphi''(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\ ds\right)$. Cette fonction est dérivable car φ est de classe $\mathcal{C}^3$ et le terme dans l'exponentielle, qui est une primitive de φ, est de classe $\mathcal{C}^4$. Alors,

$$\psi'(t) = \varphi'''(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\ ds\right) - \varphi''(t)\varphi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\ ds\right) = 0.$$

La fonction ψ est donc constante, identiquement égale à $\psi(t_0) = \varphi''(t_0)e^0 = c$. Le terme exponentiel étant positif, $\varphi''(t)$ a donc toujours le signe de c, et φ est donc soit toujours convexe, soit toujours concave.

Lorsque $c = 0$, on a $\psi(t) = 0$, donc $\varphi''(t) = 0$ pour tout t. Alors, $\varphi(t) = b(t - t_0) + a$.

Exercice 5 *Equation eikonale*

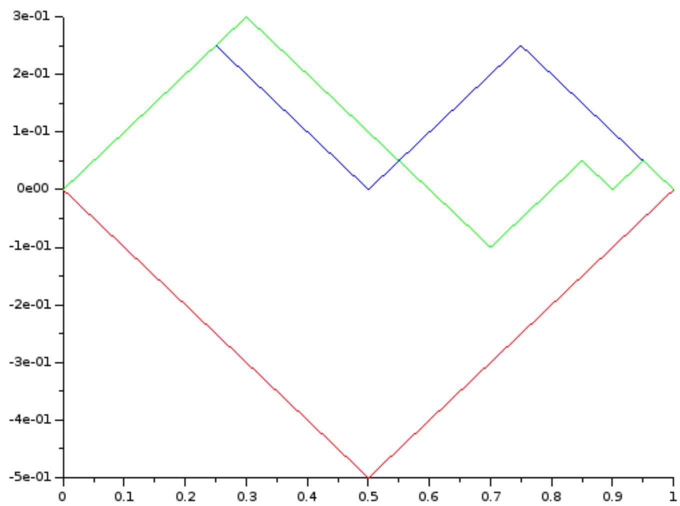
On souhaite résoudre le problème aux limites suivant sur $[0, 1]$: $|x'| = 1$ sur $[0, 1]$, et $x(0) = x(1) = 0$.

1. *Montrer qu'il n'existe pas de solution de classe $\mathcal{C}^1$ pour ce problème.*

Supposons qu'il existe une solution φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Comme $\varphi(0) = \varphi(1)$, on peut appliquer le théorème de Rolle: il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Mais alors, l'équation $|\varphi'(c)| = 1$ n'est pas respectée. L'équation n'admet donc pas de solution de classe $\mathcal{C}^1$.

2. *Proposer une solution de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Dans quel sens l'égalité $|x'| = 1$ est-elle alors satisfaite? Combien de solutions de ce type peut-on construire?*

On peut construire une infinité de solutions affines par morceaux, qui satisfont l'égalité $|x'(t)| = 1$ presque partout. Ci-contre, on en dessine quelques-unes.



Cet exemple invite la question: quelle est donc la "meilleure" solution? On peut motiver ainsi la notion de *solution de viscosité* pour les équations du type Hamilton-Jacobi. En ce sens, c'est la solution qui est tracée en rouge, convexe, qui sera privilégiée.

II. Champs de vecteurs

Exercice 6

Mettre l'équation suivante

$$x'' + 4x - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

sous la forme d'un système du premier ordre, puis en trouver une intégrale première. Dessiner les courbes de niveau.

Mettons l'équation $x'' + 4x - \frac{1}{2}x^2 = 0$ sous forme d'un système: l'inconnue de ce système sera $y = (x, x')$, et on a

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' = -4x + \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}.$$

Le champ de vecteurs associé à cette équation est donc

$$X = \begin{pmatrix} x_2 \\ -4x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 \end{pmatrix} = x_2\partial_{x_1} + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1\right)\partial_{x_2}.$$

Une intégrale première de X est une fonction $f(x_1, x_2)$ vérifiant $Xf = 0$. On doit donc résoudre

$$x_2\partial_{x_1} f + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1\right)\partial_{x_2} f = 0.$$

On résout cette EDP par séparation des variables: on cherche une solution de la forme $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Ainsi, hormis les solutions constantes $f = (0, 0)$ et $f = (8, 0)$, on a

$$\frac{f_1'(x_1)}{\frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1} = -\frac{f_2'(x_2)}{x_2}.$$

Les deux membres de cette égalité dépendent chacune d'une variable différente, donc, pour avoir égalité pour tout (x_1, x_2), il faut que ces termes soient constants.

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_1'(x_1) = c\left(\frac{1}{2}x_1^2 - 4x_1\right) \qquad \text{et} \qquad f_2'(x_2) = -cx_2,$$

$$\text{soit} \quad f_1(x_1) = \frac{c}{6}x_1^3 - 2cx_1^2 + k_1 \qquad \text{et} \qquad f_2(x_2) = \frac{-c}{2}x_2^2 + k_2,$$

avec $k_1,\ k_2$ réels. Donc, en prenant $c = 2,\ k_1,\ k_2 = 0$, on conclut que la fonction

$$f:\ (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{3}x_1^3 - 4x_1^2 - x_2^2$$

est une intégrale première du champ de vecteurs X.

Le graphe de f est facile à visualiser: il s'agit de la parabole d'équation $y = -x_2^2$ translatée le long du graphe de la fonction f_1.

Une étude rapide de la fonction f_1 aboutit au tableau de variations suivant:

x_1	$-\infty$		0		8		12		$+\infty$
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-85 - \frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

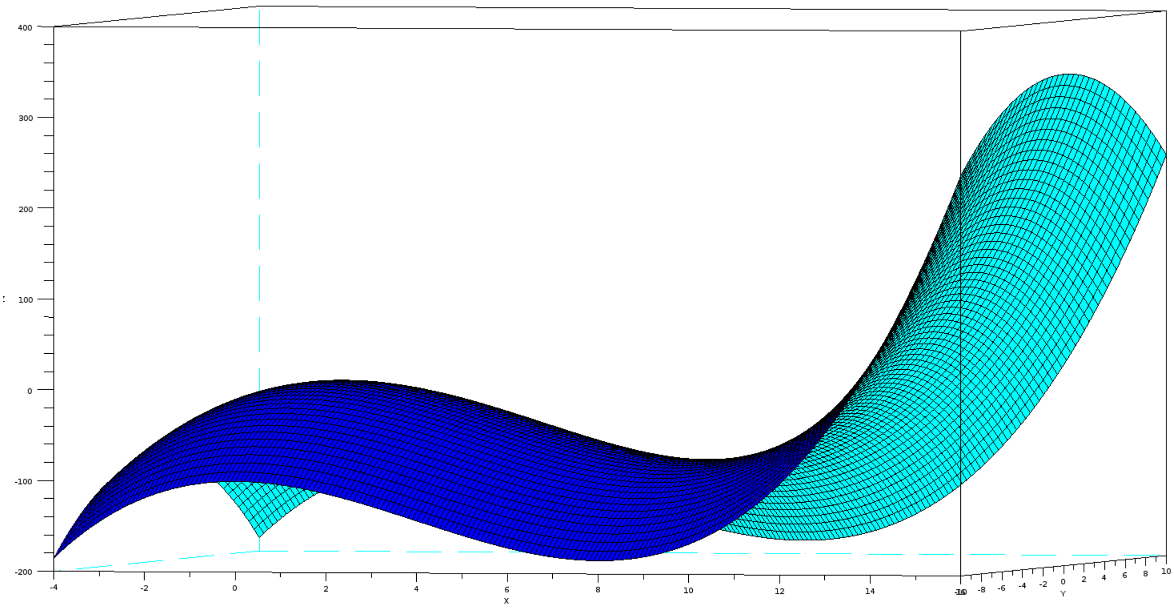


Figure 1: allure de la surface $z = f(x_1, x_2)$.

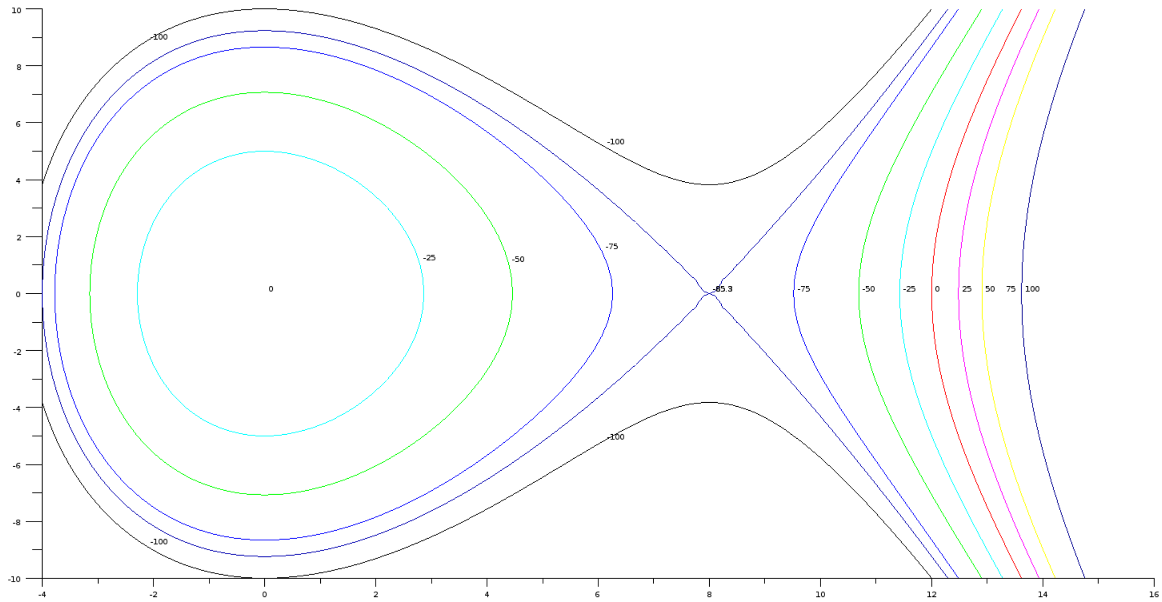


Figure 2: allure des courbes de niveau de la surface ci-dessus.

Exercice 7

Soit f un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, vérifiant $\mathrm{div}\ f(x) > 0$ *pour tout $x \in \Omega$. Montrer que le système différentiel associé n'a pas de solution périodique.*

Montrons par l'absurde que l'équation $x' = f(x)$ n'admet pas de solution périodique à valeurs dans Ω lorsque $\mathrm{div}\ f(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Supposons donc qu'il en existe une: la courbe paramétrée $t \mapsto x(t)$ délimite alors un sous-domaine $\omega \subset \Omega$, qui est borné et simplement connexe (pourquoi?).

On peut appliquer la formule de Gauss-Green (théorème 2.2.9 du poly):

$$\int_\omega \mathrm{div}\ f(x)\ dx = \int_{\partial\omega} f(x) \cdot n(x)\ d\sigma(x).$$

Comme le bord de ω est paramétré par $t \mapsto x(t)$ avec $x'(t) = f(x(t))$, on a que le vecteur $f(x(t))$ est tangent à $\partial\omega$ au point $x(t)$. Ainsi, $f(x) \cdot n(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\omega$. Or, l'intégrale de gauche est strictement positive d'après l'hypothèse $\mathrm{div}\ f > 0$. La contradiction est établie.

Exercice 8 *Champs de vecteurs homogènes*

1. *Soit h une fonction homogène de degré 0, c'est-à-dire que, pour tout $r > 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(rx, ry) = h(x, y)$. On admet alors qu'il existe k tel que $h(x, y) = k\left(\frac{x}{y}\right)$. Montrer que l'équation $\frac{dy}{dx} = h(x, y)$ devient une équation à variables séparées pour l'inconnue $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.*

Cherchons l'équation vérifiée par $u(x) = y(x)/x$: on a

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{xy'(x) - y(x)}{x^2} = \frac{h(x, y(x))}{x} - \frac{y(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x}\left[k\left(\frac{x}{y(x)}\right) - \frac{y(x)}{x}\right] = \frac{1}{x}\left[k\left(\frac{1}{u(x)}\right) - u(x)\right]. \end{aligned}$$

L'équation $u' = \frac{1}{x}\left(k(\frac{1}{u}) - u\right)$ est bien à variables séparées.

2. *Considérons le champ de vecteurs*

$$X = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

où f, g sont des fonctions homogènes de degré a, c'est-à-dire que, pour $r > 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(rx,ry) = r^a f(x,y)$ et $g(rx,ry) = r^a g(x,y)$. En supposant que $x = v(y)$, établir une méthode pour déterminer les courbes intégrales de X en se ramenant au cas précédent.

Le champ $X = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ correspond au système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& f(x,y) \\ y' &=& g(x,y). \end{array}\right.$$

Supposons que l'on puisse écrire $x(t) = v(y(t))$ (c'est toujours possible au moins localement en temps, ou alors on inverse les rôles de x et de y; y réfléchir avec le premier exemple ci-dessous). On a alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} \quad , \text{ soit } \quad \frac{dv}{dy} = \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

On vérifie facilement que f/g est homogène de degré 0, donc on peut appliquer le résultat de la question précédente: il existe une fonction k telle que $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = k\left(\frac{y}{v(y)}\right)$, et l'équation $v'(y) = k(y/v)$ est à variables séparées pour l'inconnue $u = v/y$.

3. (a) *Appliquer la méthode décrite ci-dessus au champ angulaire*

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

et retrouver la relation $x = \pm\sqrt{C^2 - y^2}$.

En supposant qu'on a $x = v(y)$, on se ramène à résoudre $v'(y) = -\frac{y}{v(y)}$, ce qui donne $v(y)^2 + y^2 = C^2$.

(b) *Trouver les courbes intégrales du champ de vecteurs*

$$X = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Appliquons la méthode décrite ci-dessus au cas $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = xy$. Ce sont bien deux fonctions homogènes de degré 2. On suppose que l'on a $x = v(y)$, et on se ramène à résoudre

$$v'(y) = \frac{v^2 + y^2}{vy} = \frac{v}{y} + \frac{y}{v} = k\left(\frac{y}{v}\right),$$

avec $k(s) = s + 1/s$. D'après la question 1, en posant $u = v/y$, cette équation se ramène à

$$u' = \frac{1}{y}\left(k(\frac{1}{u}) - u\right) = \frac{1}{yu},$$

qui est bien une équation à variables séparées que l'on peut résoudre: $uu' = 1/y$. A gauche, on a $1/2$ fois la dérivée de u^2, ainsi $u(y)^2 = 2\ln(|y|) + K$, avec $K \in \mathbb{R}$. On obtient alors l'expression de $x(t)$ en fonction de $y(t)$: comme $x = v(y) = yu(y)$,

$$x(t) = y(t)\sqrt{2\ln(|y(t)|) + K}.$$

Reste à déterminer $y(t)$. On utilise l'EDO $y' = g(x, y) = xy$, donc on veut résoudre $y' = y^2\sqrt{2\ln(|y|) + K}$. Pour simplifier, prenons $K = 0$. On est alors en présence d'une équation à variables séparées, mais il nous faut connaître une primitive de

$$\Phi : s > 1 \mapsto \frac{1}{s^2\sqrt{2\ln(s)}}.$$

Faisons le changement de variable $z = \sqrt{2\ln(s)} = \sqrt{\ln(s^2)}$. On a alors $s = e^{-z^2/2}$ et $ds = ze^{-z^2/2}\, dz$, ainsi

$$\int^t \Phi(s)\, ds = \int^{\sqrt{\ln(t^2)}} e^{-z^2/2}\, dz := H(\sqrt{2\ln(t)}) + C.$$

La fonction H est, à la constante de normalisation près, la fonction de répartition de la loi gaussienne: c'est donc une fonction croissante, bijective. On conclut alors que

$$\sqrt{2\ln(y(t))} = H^{-1}(t - C) \quad , \text{ soit } \quad y(t) = \exp\left(\frac{(H^{-1}(t-C))^2}{2}\right).$$

III. Méthode des caractéristiques

Dans cette partie, on trace toujours les caractéristiques dans un repère (x, t). Le temps est donc vertical, et on suit la progression des caractéristiques de bas en haut.

Exercice 9

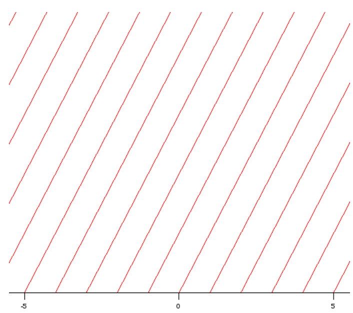
Dans ce qui suit, sont fixées: f et g fonctions continues, $a \in \mathbb{R}$ constante non nulle, et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Résoudre les EDP proposées avec la méthode des caractéristiques.

1. Résolvons l'équation de transport 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

par la méthode des caractéristiques: on commence par chercher les courbes $(t, x(t))$ satisfaisant

$$\begin{cases} x'(t) &= a \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$



Ces courbes sont en fait des droites: on a $x(t) = a(t - t_0) + x_0$.

Le long de ces courbes, la solution de l'EDP est constante. En posant $v(t) = u(t, x(t))$ avec $x(t_0) = x_0$, on a

$$v'(t) = \partial_t u(t, x(t)) + x'(t)\partial_x u(t, x(t)) = \partial_t u(t, x(t)) + a\partial_x u(t, x(t)) = 0.$$

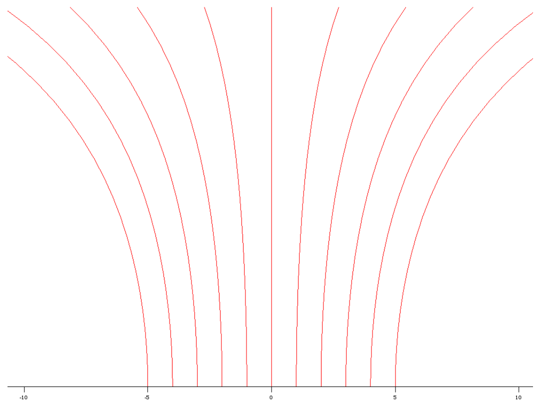
Ainsi, $v(t) = v(t_0) = u(t_0, x(t_0)) = g(x_0)$.

On déduit l'expression de u: comme $x = a(t - t_0) + x_0$, on a $x_0 = x - a(t - t_0)$, soit

$$u(t, x) = g(x - a(t - t_0)).$$

2. Recherchons les courbes caractéristiques pour l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2xt\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$



Ces courbes $x(t)$ satisfont

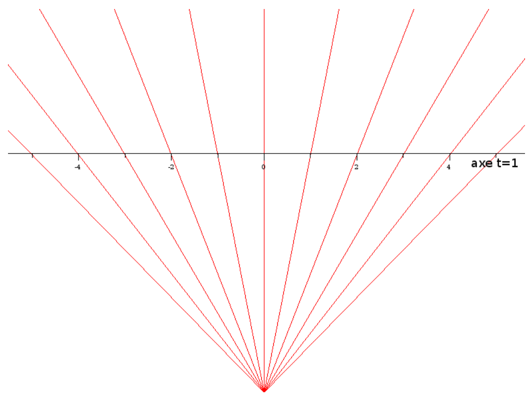
$$\begin{cases} x'(t) &= 2tx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

équation que l'on peut résoudre par séparation des variables une fois écartée la solution $x = 0$ (lorsque $x_0 = 0$). On trouve $x(t) = x_0 e^{t^2}$.

Une nouvelle fois, la solution de l'EDP prise le long de ces caractéristiques est constante, d'où $u(t, x(t)) = x_0$. Comme $x = x_0 e^{t^2}$, on conclut que la solution de l'EDP est

$$u(t, x) = xe^{-t^2}.$$

3. L'équation $t\partial_t u + x\partial_x u = 2u$ possède un coefficient devant ∂_t, toutefois ce coefficient est non nul au voisinage de $t = 1$, donc on divise l'EDP par t pour se ramener à résoudre



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x}{t}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{t}u.$$

Les caractéristiques vérifient alors l'équation $x'(t) = x(t)/t$ avec la condition $x(1) = x_0$, qui se résout par séparation des variables une fois écartée la solution triviale $x \equiv 0$. On trouve $x(t) = x_0 t$.

On retrouve ces mêmes caractéristiques en raisonnant sur l'équation de départ, et en paramétrant le temps et l'espace, c'est-à-dire qu'on cherche $(t(s), x(s))$ tels que

$$\frac{d}{ds}(u(t(s), x(s))) = t'(s)\frac{\partial u}{\partial t}(t(s), x(s)) + x'(s)\frac{\partial u}{\partial x}(t(s), x(s)) = t\partial_t u + x\partial_x u,$$

ce qui revient à résoudre les problèmes

$$\begin{cases} t'(s) &= t(s) \\ t(0) &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(s) &= x(s) \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Très rapidement, on a $t(s) = e^s$ et $x(s) = x_0 e^s$, ce qui nous permet d'arriver à la relation entre t et x qui donne les courbes (droites) caractéristiques: $x(t) = x_0 t$.

Remarquez que les caractéristiques s'intersectent en $(t, x) = (0, 0)$. La solution ainsi construite est définie sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

Le long des caractéristiques, on pose $v(t) = u(t, x(t))$, et on doit résoudre $v'(t) = \frac{2}{t} v(t)$ avec la condition $v(1) = u(1, x_0) = g(x_0)$. On aboutit à $u(t, x(t)) = g(x_0)t^2$, avec $x_0 = x/t$, d'où

$$u(t, x) = g(x/t)t^2.$$

4. L'EDP $\partial_t u + u\partial_x u = 1$ est non-linéaire, on doit alors résoudre l'équation des courbes caractéristiques et celle sur $v(t) = u(t, x(t))$ en même temps. On résout donc le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& v(t) \\ v'(t) &=& 1 \\ x(x_0) &=& x_0 \\ v(x_0) &=& \frac{1}{2}x_0. \end{array}\right.$$

On a alors très rapidement que

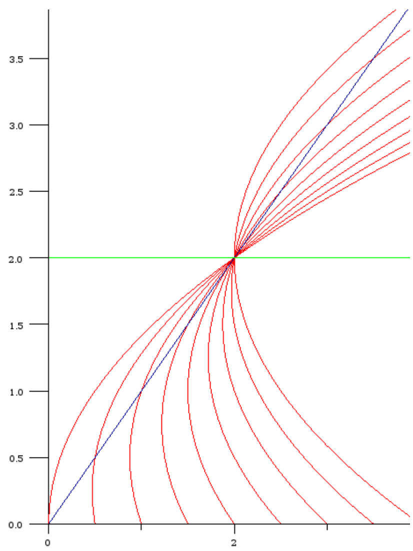
$$\begin{array}{rrcl} & v(t) &=& t - x_0 + \frac{1}{2}x_0 = t - \frac{1}{2}x_0 \\ \text{et} & x(t) &=& \frac{1}{2}(t^2 - x_0 t) + x_0. \end{array}$$

Remarquons que les caractéristiques se coupent en $(t, x) = (2, 2)$ (le vérifier), et que $v(t) \neq 1$ lorsque $x_0 \neq 2$.

Pour $t \neq 2$, on peut écrire $x_0 = \frac{2x - t^2}{2 - t}$, ce qui donne l'expression de $u(t, x)$:

$$u(t, x) = t - \frac{2x - t^2}{2(2 - t)}.$$

Il apparaît que toute la droite d'équation $t = 2$ est singulière: aucune caractéristique ne passe par $(2, y)$ pour $y \neq 2$, et toutes passent par $(2, 2)$, avec $\limsup_{(t,x)\to(2,2)} u(t, x) = +\infty$.



Ainsi, u est une solution du problème, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 2[\times\mathbb{R}$ et sur $]2, +\infty[$. Elle ne satisfait $u(x, x) = \frac{x}{2}$ que dans le sens des limites le long des caractéristiques.

5. Traitons l'équation de transport multi-D. Les caractéristiques seront des courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$, $t \mapsto x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, telles qu'on ait $x_j'(t) = b_j$, ainsi $x_j(t) = b_j t + x_j(0)$. On pose $v(t) = u(t, x(t))$, et v résout l'EDO

$$\left\{\begin{array}{rcl} v'(t) &=& f(t, x(t)) \\ v(0) &=& g(x(0)). \end{array}\right.$$

On peut écrire la solution de ce problème avec la formule de Duhamel: $v(t) = g(x(0)) + \int_0^t f(s, x(s))\, ds$, soit, en notant que $x(s) = x - (t - s)b$ pour $0 \leq s \leq t$, on conclut que

$$u(t, x) = g(x - tb) + \int_0^t f(s, x - (t - s)b)\, ds.$$

6. L'équation $\partial_t u + u \cdot \nabla u + au = 0$ est une équation de type Burgers. En notant $v(t) = u(t, x(t))$, où $x(t)$ est une courbe caractéristique, la paire (x_j, v_j) résout l'EDO

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_j' & = & -av_j \\ x_j' & = & v_j \\ v_j(0) & = & u_{0,j}(x_0) \\ x_j(0) & = & x_{0,j}. \end{array} \right.$$

La première équation donne $v_j(t) = u_{0,j}(x_0)e^{-at}$, d'où $x(t) = \frac{-1}{a}(e^{-at} - 1)u_{0,j}(x_0) + x_{0,j}$.

Pour finir, on doit inverser le flot $\phi : (t, y) \mapsto y - \frac{1}{a}(e^{-at} - 1)u_0(y)$ pour écrire une expression de $u(t, x)$. Ce ne sera pas explicite, mais on peut vérifier que, pour $t \geq 0$ (éventuellement assez petit), $\phi(t)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, et conclure que

$$u(t, x) = u_0(\phi^{-1}(x))e^{-at}. \tag{2}$$

La différentielle de $y \mapsto \phi(t, y)$ est

$$D\phi(t, y) = \mathrm{Id} - \frac{1}{a}(e^{-at} - 1)Du_0(y),$$

et on remarque que $e^{-at} - 1 = \mathcal{O}(t)$ lorsque $t \to 0$. Ainsi, $|||\frac{1}{a}(e^{-at} - 1)Du_0 < 1$ pour $t \in [0, t^*]$, pour un certain $t^* > 0$. La différentielle $D\phi(t)$ est alors inversible pour $t \in [0, t^*]$, et, sur ce même intervalle de temps, l'expression (2) est valable pour exprimer la solution du problème.

Exercice 10 *Equation de Burgers*

Pour différentes données initiales, on va résoudre l'EDP

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x(u^2) = 0. \tag{3}$$

On peut déterminer les caractéristiques pour les trois cas présentés de façon unifiée. Sur le modèle de l'exercice 9, question 4, on cherche $x(t)$ de sorte que, en posant $v(t) = u(t, x(t))$, on ait

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & v(t) \\ v'(t) & = & 0 \\ x(0) & = & x_0 \in \mathbb{R} \\ v(0) & = & u_0(x_0) \end{array} \right.$$

si la donnée initiale de l'EDP est $u(0, x) = u_0(x)$.

Immédiatement, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, on obtient que la solution u est constante, égale à $u_0(x_0)$, le long de la droite caractéristique d'équation $x = u_0(x_0)t + x_0$.

1. Donnée croissante et onde de raréfaction.

Pour $\alpha > 0$, la condition initiale pour cette partie est

$$u_0^\alpha(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 < x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha. \end{array} \right.$$

(a) *Pour $\alpha > 0$ fixé, construire une solution de (3), qu'on notera u^α, à l'aide de la méthode des caractéristiques. La solution obtenue est-elle classique?*

Dans le cas d'une donnée croissante, le flot au temps $t \geq 0$, $\phi_t^\alpha : x \mapsto u_0^\alpha(x)t + x$, est strictement croissant, donc bijectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a donc $u^\alpha(t,x) = u_0^\alpha((\phi_t^\alpha)^{-1}(x))$.

Une visualisation graphique est plus parlante, car on y observe concrètement que:

- dans la zone $\{(x,t) \mid x \leq 0\}$, les caractéristiques sont verticales, et on a donc $u^\alpha(t,x) = 0$ pour tout t;
- dans l'ensemble $\{(x,t) \mid x \geq t + \alpha\}$, les caractéristiques sont de pente 1 et on a $u^\alpha(t,x) = 1$;
- et entre les deux, à t fixé, u effectue une transition linéaire de pente $\frac{1}{t+\alpha}$ de l'état $u = 0$ (à gauche) à l'état $u = 1$ (à droite).

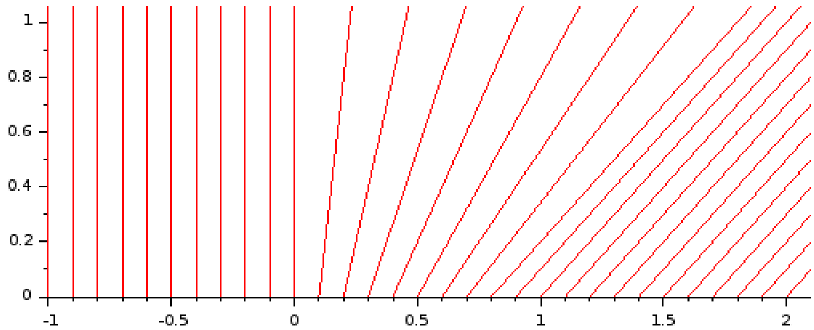


Figure: caractéristiques avec $\alpha = 0,8$.

Il ne s'agit pas d'une solution classique car elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) *Etudier le comportement de u^α lorsque $\alpha \to 0$. Qu'obtient-on à la limite?*

Pour $t > 0$, la limite lorsque α tend vers 0 de $u^\alpha(t)$ est la fonction définie par morceaux

$$u^0(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x/t & \text{si } 0 < x < t \\ 1 & \text{si } x \geq t, \end{cases}$$

c'est-à-dire l'onde de raréfaction, équation (2.4.8) du poly. Cette solution, qui est entropique[1], est également une bonne solution du point de vue de l'approximation de la donnée initiale $u_0^0 = H$ par des données affines par morceaux.

[1]Le poly omet la définition; une solution est entropique s'il existe E indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et de $t > 0$ tel que, pour tout $a > 0$, $\frac{1}{a}(u(t,x+a) - u(t,x)) \leq E/t$.
Voir par exemple `http://www.math.ualberta.ca/~xinweiyu/527.1.08f/lec19.pdf`

2. Donnée non monotone.

Cette fois, la donnée initiale est $u_0(x) = \sin(x)$.

(a) *Montrer que les caractéristiques ne se croisent pas avant l'instant $t = 1$.*

Pour $a < b$, résolvons l'équation d'intersection des caractéristiques issues de a et de b, c'est-à-dire $\sin(a)t + a = \sin(b)t + b$. Si $\sin(a) \neq \sin(b)$, ces droites s'intersectent lorsque

$$t = \frac{b-a}{\sin(a) - \sin(b)}.$$

On observe que la quantité de droite est l'inverse du taux d'accroissement de la fonction sinus entre a et b, ainsi $|t| \geq \frac{1}{L}$, où L est la constante de Lipschitz de la fonction sinus. Comme $L = 1$, les caractéristiques ne se croisent effectivement pas avant le temps $t = 1$.

(b) *Pour $\varepsilon > 0$ petit, déterminer le temps t_ε auquel se croisent les caractéristiques issues des points $\pi - \varepsilon$ et $\pi + \varepsilon$. En déduire le temps maximal d'existence d'une solution classique de (3).*

Le temps d'intersection des droites caractéristiques issues de $\pi - \varepsilon$ et $\pi + \varepsilon$ est

$$t^\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{\sin(\pi - \varepsilon) - \sin(\pi + \varepsilon)}.$$

Lorsque ε tend vers 0, un DL de la fonction sin donne

$$t^\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)} = \frac{1}{1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

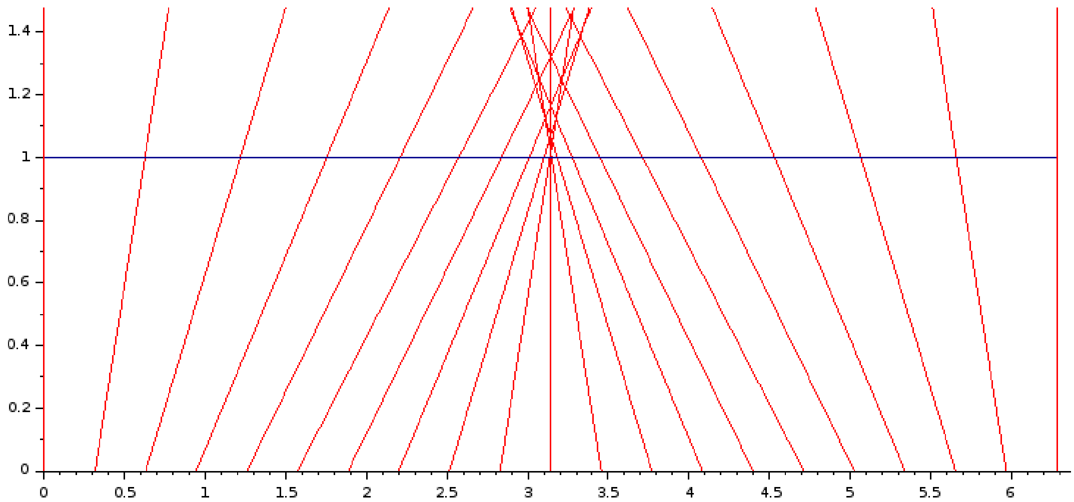


Figure: croisement des caractéristiques juste après $t = 1$.

Ainsi, pour tout $\delta > 0$ petit, deux caractéristiques se croisent au temps $1 + \delta$, et les valeurs de u le long de ces caractéristiques sont non nulles et opposées. Une solution de classe $\mathcal{C}^1$ du problème existe donc sur $[0, 1[\times\mathbb{R}$.

3. Apparition d'un choc.
Déterminer la solution globale entropique de (3) avec la condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \leq -1 \ \text{ ou } \ x \geq \frac{1}{2} \\ 1+x & \text{si } \ -1 < x \leq 0 \\ 1-2x & \text{si } \ 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dans le cas présenté ici, les droites caractéristiques ont pour paramétrisation

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } \ x \leq -1 \ \text{ ou } \ x \geq \frac{1}{2} \\ (1+x_0)t + x_0 & \text{si } \ -1 < x_0 \leq 0 \\ (1-2x_0)t + x_0 & \text{si } \ 0 < x_0 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

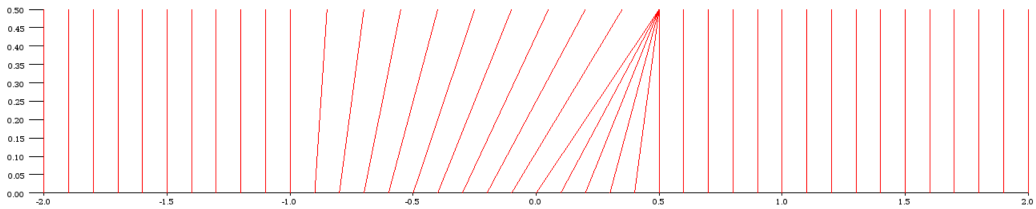


Figure: droites caractéristiques jusqu'au temps $t = 1/2$.

L'allure des caractéristiques invite à dire que les caractéristiques issues du segment $[0, 1/2]$ se coupent toutes au même endroit. Vérifions-le: soient x_0, $y_0 \in [0, 1/2]$, et résolvons

$$(1-2x_0)t + x_0 = (1-2y_0)t + y_0 \ \Leftrightarrow \ t = \frac{x_0 - y_0}{2(x_0 - y_0)} = \frac{1}{2}.$$

Explicitons la valeur de $u(t,x)$ pour déterminer ce que ce point de croisement va donner.

- D'une part, lorsque $x \leq -1$ ou $x \geq \frac{1}{2}$, $u(t,x) = 0$.
- D'autre part, pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, lorsque $-1 < x \leq t$, on a

$$u(t,x) = 1 + \frac{x-t}{1+t} = \frac{1+x}{1+t}.$$

  On retrouve bien que $u(t,x) \in]0,1]$ dans cette zone.

- Dans la dernière zone, $t < x < \frac{1}{2}$, la solution est affinement décroissante.

Au temps $t = \frac{1}{2}$, le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ voit donc arriver à gauche des valeurs positives, alors qu'à droite, la solution reste nulle: un choc va se créer, et la solution entropique y satisfera la relation de Rankine-Hugoniot.

L'équation de Burgers s'écrivant $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ avec $f(u) = \frac{u^2}{2}$, le choc suivra une courbe $x = \sigma(t)$ satisfaisant la relation $\sigma'(t) = \frac{f(u_g) - f(u_d)}{u_g - u_d}$, où u_g et u_d sont les valeurs à gauche et à droite du choc. Ici, on a $u_d = 0$ et

$$u_g = u_g(t, \sigma(t)) = \frac{1+\sigma(t)}{1+t}.$$

Ainsi, on doit résoudre $\sigma' = \frac{1+\sigma}{2(1+t)}$ avec la condition initiale $\sigma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Remarquons que l'équation $\sigma' = a(t) + a(t)\sigma$, avec $a(t) = (2(1+t))^{-1}$, est linéaire d'ordre 1, donc on peut la résoudre explicitement soit par variation de la constante, soit avec la formule de Duhamel (exercice 2). Posons $A(t) = \ln(\sqrt{1+t})$ une primitive de a. On a alors,

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \frac{1}{2}e^{A(t)-A(1/2)} + \int_{\frac{1}{2}}^{t} a(s)e^{A(t)-A(s)}\,ds \\
&= \sqrt{\frac{1+t}{6}} + \frac{\sqrt{1+t}}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{t}\frac{1}{(1+s)^{3/2}}\,ds \\
&= \sqrt{\frac{1+t}{6}} - \sqrt{1+t}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}(1+t)} - 1.
\end{aligned}$$

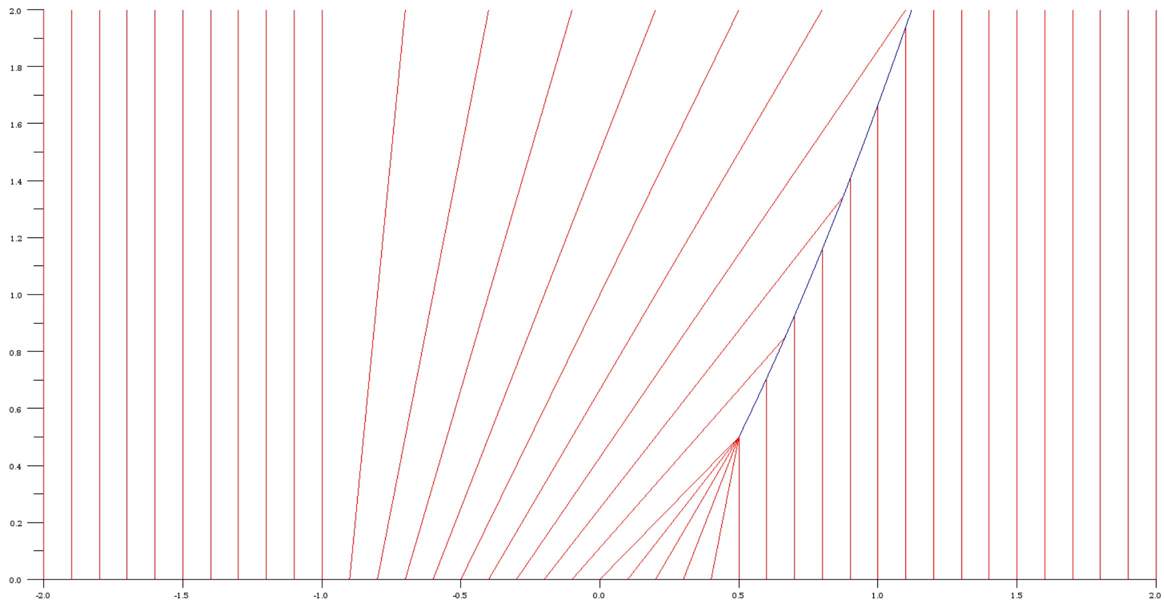


Figure: allure des caractéristiques, prenant en compte le choc après $t = \frac{1}{2}$.

UPMC, Master 1 Mathématiques, année 2014-2015
UE 4M046: Equations aux Dérivées Partielles

Corrigé TD 2

I. Champs, flots et caractéristiques (bis)

Exercice 1 *Les ondes solitaires de KdV*

On considère l'équation de Korteweg-de Vries (KdV), un modèle pour les vagues en eaux peu profondes: $\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0$.

Montrer que cette équation admet des solutions non triviales sous la forme d'onde progressive, $u(t,x) := v(x - \sigma t)$, *où* $\sigma > 0$, *et* v *est une fonction régulière qui satisfait* $v(s),\ v'(s),\ v''(s) \to 0$ *lorsque* $s \to +\infty$.

On remplace $u(t,x)$ par la forme de solution proposée, $v(x - \sigma t)$, et on arrive à l'équation différentielle d'ordre 3

$$-\sigma v' + 6vv' + v''' = 0.$$

On reconnaît à gauche la dérivée de $-\sigma v + 3v^2 + v''$; cette fonction est donc constante, égale à 0 vu les limites sur v et v'' que l'on souhaite. On arrive donc à l'équation différentielle d'ordre 2 $-\sigma v + 3v^2 + v'' = 0$. Pour faire apparaître à nouveau une dérivée exacte, on multiplie cette équation par v', et on se ramène donc à résoudre

$$-\sigma v^2 + 2v^3 + (v')^2 = 0. \tag{1}$$

Cette équation différentielle d'ordre 1 est à variables séparées, donc on doit calculer $\int^v \frac{dz}{z\sqrt{\sigma - 2z}}$ pour la résoudre. Pour cela, on fait le changement de variable proposé: $z = \frac{\sigma}{2}\mathrm{sech}^2(s)$. On a que

$$\sigma - 2z = \sigma(1 - \mathrm{sech}^2(s)) = \sigma \tanh^2(s),$$

ce qui permet d'écrire, en notant sech^{-1} la réciproque de sech sur $\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}\int^v \frac{dz}{z\sqrt{\sigma - 2z}} &= \int^{\mathrm{sech}^{-1}(\sqrt{2v/\sigma})} \frac{2\cosh^3(s)}{\sigma^{3/2}\sinh(s)} \cdot \frac{-\sigma \sinh(s)}{\cosh^3(s)}\, ds \\ &= \frac{-2}{\sqrt{\sigma}} \int^{\mathrm{sech}^{-1}(\sqrt{2v/\sigma})} 1\, ds = -\frac{2}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{sech}^{-1}\left(\sqrt{2v/\sigma}\right).\end{aligned}$$

Il vient donc que la solution de (1) satisfait

$$\frac{-2}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{sech}^{-1}\left(\sqrt{2v(x)/\sigma}\right) = x \ \ , \text{ d'où } \ v(x) = \frac{\sigma}{2}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\sigma}2x\right).$$

La solution sous forme d'onde progressive à vitesse σ de KdV s'écrit donc

$$u(t,x) = \frac{\sigma}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x-\sigma t)\right).$$

<u>Référence:</u> pour plus d'information sur KdV (historique, simulations numériques), on pourra consulter le document de Klaus Brauer, en ligne à l'adresse: `https://www.usf.uni-osnabrueck.de/uploads/media/KdV.pdf`.

Exercice 2 *Systèmes hamiltoniens et crochet de Poisson*

Soit $f : (x,\xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ régulière. Un système d'EDO est dit hamiltonien s'il s'écrit, pour chaque $i \in \{1,\cdots,N\}$,

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= \partial_{\xi_i} f(x,\xi) \\ \dot{\xi}_i &= -\partial_{x_i} f(x,\xi). \end{cases}$$

1. *Écrire le champ de vecteurs H_f associé à ce système.*

Chaque système sur (x_i,ξ_i) est associé à un champ $X_i = \partial_{\xi_i} f \partial_{x_i} - \partial_{x_i} f \partial_{\xi_i}$, d'où le champ complet pour l'équation sur (x,ξ) est la somme des X_i.

2. *On définit le crochet de Poisson de f et $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, régulières, par*

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^N \partial_{\xi_i} f \cdot \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \cdot \partial_{\xi_i} g.$$

(a) *Écrire le crochet de Poisson $\{f,g\}$ en termes du champ H_f, puis du champ H_g.*

Vu le résultat précédent, on a simplement $\{f,g\} = H_f g = -H_g f$.

(b) *Montrer que $H_{\{f,g\}} = H_f H_g - H_g H_f$.*

D'un côté, on a $H_{\{f,g\}} = \sum_{j=1}^N \partial_{\xi_j}\{f,g\}\partial_{x_j} - \partial_{x_j}\{f,g\}\partial_{\xi_j}$, soit

$$H_{\{f,g\}} = \sum_{i,j=1}^N \partial_{\xi_j}(\partial_{\xi_i} f \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{\xi_i} g)\partial_{x_j} - \partial_{x_j}(\partial_{\xi_i} f \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{\xi_i} g)\partial_{\xi_j}. \tag{2}$$

De l'autre, développons $H_f H_g$:

$$\begin{aligned} H_f H_g \quad = \quad & \sum_{i,j=1}^N (\partial_{\xi_i} f \partial_{\xi_j} g)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + (\partial_{x_i} f \partial_{x_j} g)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} \\ & -(\partial_{\xi_i} f \partial_{x_j} g)\partial_{x_i}\partial_{\xi_j} - (\partial_{x_i} f \partial_{\xi_j} g)\partial_{\xi_i}\partial_{x_j} \\ & +(\partial_{\xi_i} f \partial_{\xi_j x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{\xi_j \xi_i} g)\partial_{x_j} \\ & -(\partial_{\xi_i} f \partial_{x_j x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{x_j \xi_i} g)\partial_{\xi_j}. \end{aligned}$$

Par symétrie, les deux premières lignes de $H_f H_g$ apparaissent également dans $H_g H_f$, donc ces termes se compensent dans $H_f H_g - H_g H_f$. En rassemblant les dernières lignes de $H_f H_g$ et les termes analogues de $-H_g H_f$, on retrouve l'expression (2).

(c) *En déduire l'identité de Jacobi: pour trois fonctions* $f,\ g,\ h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *régulières, on a*

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

On exprime chaque terme de l'identité en termes de champ. Le dernier, c'est $-H_{\{f,g\}}h$, tandis que

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} = H_f H_g h - H_g H_f h.$$

La question précédente permet de conclure.

3. *Soit* $f : (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ *régulière donnée, et considérons l'EDP*

$$\partial_t u + \{f,u\} = 0. \tag{3}$$

(a) *Montrer que (3) est une équation de transport, de la forme* $\partial_t u + a \cdot \nabla u = 0$*, avec le champ de vecteur* $a(x,\xi)$ *à déterminer, et* $\nabla = (\nabla_x, \nabla_\xi)$.

Il suffit de développer le crochet de Poisson: on a

$$\{f,u\} = \nabla_\xi f \cdot \nabla_x u - \nabla x f \cdot \nabla_\xi u = (\nabla_\xi f, -\nabla_x f) \cdot \nabla u,$$

donc on trouve bien une équation de transport avec $a = (\nabla_\xi f, -\nabla_x f)$.

(b) *Montrer que la caractéristique* $t \mapsto (X(t), \Xi(t)) \in \mathbb{R}^{2N}$ *associée à l'équation de transport précédente et partant de* $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2N}$ *fixé, résout un système hamiltonien.*

L'EDO satisfaite par la caractéristique est la suivante:

$$\begin{cases} (X'(t),\Xi'(t)) &= a(X(t),\Xi(t)) \\ (X(0),\Xi(0)) &= (x_0,\xi_0). \end{cases}$$

Si on écrit ce que cette équation signifie composante par composante, et en utilisant l'expression de a, on trouve que, pour tout $i \in \{1,\cdots,N\}$,

$$\begin{cases} X_i' &= \partial_{\xi_i} f(X,\Xi) \\ \Xi_i' &= -\partial_{x_i} f(X,\Xi) \\ (X_i,\Xi_i)(0) &= (x_{0,i},\xi_{0,i}), \end{cases}$$

et on observe bien la structure hamiltonienne.

Question subsidiaire: le mot 'régulière' dans l'énoncé sous-entend que l'EDO va être bien posée. Proposer une hypothèse sur f qui permette d'assurer l'existence et l'unicité de la caractéristique issue de (x_0,ξ_0).

Exercice 3 *Temps d'existence maximal pour une loi de conservation*

Soient a *et* u_0 *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*, avec* u_0 *à support compact. Le but de l'exercice est de démontrer que le problème de Cauchy non linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t u + a(u(t,x))\partial_x u &= 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 |\ t \geq 0\}$ *si et seulement si la condition suivante est satisfaite:*

$$a'(u_0(x))u_0'(x) \geq 0 \ \ ,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

1. *On suppose que u est une solution $\mathcal{C}^1$ de (4), et soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la fonction $t \geq 0 \mapsto x + ta(u_0(x))$ est la seule solution de l'EDO*

$$\begin{cases} y'(t) &= a(u(t, y(t))) \\ y(0) &= x. \end{cases}$$

Résoudre l'EDO proposée est équivalent à chercher les courbes caractéristiques pour l'EDP (4). Le long des caractéristiques, on a $v'(t) = \frac{d}{dt}u(t, y(t)) = 0$, d'où $v(t)$ est constante, égale à $u_0(x)$. Ainsi, $y'(t)$ est constante, et $y(t)$ est affine, de pente $a(u_0(x))$ et d'ordonnée à l'origine x.

2. *Montrer que l'application F_t de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F_t : x \in \mathbb{R} \mapsto x+ta(u_0(x))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$, si et seulement si (5) est satisfaite.*

L'application F_t est bien de classe $\mathcal{C}^1$, et est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si F_t' a un signe constant et ne s'annule pas. On a $F_t'(x) = 1 + tu_0'(x)a'(u_0(x))$.

Il est clair que si la condition (5) est satisfaite, alors $F_t'(x) \geq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe x_0 tel que $u_0'(x_0)a'(u_0(x_0)) = -c_0 < 0$. Alors, en $t_0 = 1/c_0$, on a $F_{t_0}'(x_0) = 0$, d'où F_{t_0} n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

3. *On suppose que la condition (5) est satisfaite, et on note G_t l'inverse de F_t. Montrer que la fonction u définie par $u(t,x) := u_0(G_t(x))$ est une solution de casse $\mathcal{C}^1$ du problème (4) sur $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 |\ t \geq 0\}$.*

Les fonctions u_0 et G_t sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $G_t'(x) = \frac{1}{F_t'(G_t(x))}$, mais il faut également comprendre le comportement en t de G_t. Comme $t \mapsto F_t(x)$ est dérivable, il en va de même pour $t \mapsto G_t(x)$. Vu que $F_t(G_t(x)) = x$, on écrit

$$G_t(x) + ta(u_0(G_t(x))) = x.$$

Dérivons ceci par rapport à t: on trouve l'équation

$$\partial_t G_t(x) F_t'(G_t(x)) + a(u_0(G_t(x))) = 0.$$

Or, $F_t'(x) > 0$ pour tout (t,x), d'où $\partial_t G_t(x) = -a(u_0(G_t(x)))G_t'(x)$. On rassemble tout ça pour obtenir

$$\partial_t u + a(u)\partial_x u = u_0'(G_t)(\partial_t G_t + a(u_0(G_t))G_t') = 0.$$

4. *On suppose maintenant que la condition (5) n'est pas satisfaite. Montrer alors que le plus grand temps T pour laquelle une solution $\mathcal{C}^1$ de (4) existe est donné par*

$$T = \frac{-1}{\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} a'(u_0(x))u_0'(x)}.$$

Tant que F_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, la formule $u(t,x) = u_0(G_t(x))$ est valable, et

$$\partial_x u(t,x) = u_0'(G_t(x))G_t'(x) = \frac{u_0'(G_t(x))}{F_t'(G_t(x))}.$$

Soit $-m = \inf_{x\in\mathbb{R}} a'(u_0(x))u_0'(x)$: pour $t > 0$ fixé, on a

$$\lim_{t\to 1/m} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{F_t'(x)} = +\infty,$$

ce qui prouve que $\partial_x u$ explose au voisinage de $t = T = 1/m$.

Exercice 4

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à frontière $\mathcal{C}^1$, $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs lipschitzien et sous-linéaire, et $\phi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ son flot.

Pour $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, montrer que

$$\frac{d}{dt}\int_{\phi(t,\Omega)} f(t,x)\, dx = \int_{\phi(t,\Omega)} \partial_t f(t,x)\, dx + \int_{\partial\phi(t,\Omega)} f(t,x)u(t,x)\cdot n(t,x)\, dx,$$

où $n(t,\cdot)$ est la normale sortante au bord du domaine $\phi(t,\Omega)$.

Le lemme 2.3.2 du poly s'applique à u, impliquant que son flot est global, et que, pour tout $t \geq 0$, $\phi(t,\cdot)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur $\phi(t,\Omega)$.

Dans l'intégrale $\int_{\phi(t,\Omega)} f(t,x)\, dx$, on peut tirer en arrière le flot, ce qui revient à faire le changement de variable $x = \phi(t,y)$:

$$\int_{\phi(t,\Omega)} f(t,x)\, dx = \int_\Omega f(t,\phi(t,y))J_y\phi(t,y)\, dy, \tag{6}$$

avec $J_y\phi(t,y) = \det(D_y\phi(t,y))$ le jacobien de $\phi(t,\cdot)$. Le domaine d'intégration du membre de droite de (6) ne dépendant pas de t, il devient donc aisé de dériver par rapport au temps:

$$\begin{aligned}\partial_t \int_\Omega f(t,\phi(t,y))J_y\phi(t,y)\, dy \quad &= \quad \int_\Omega \partial_t f(t,\phi(t,y))J_y\phi(t,y)\, dy \\ &\quad + \int_\Omega \nabla_x f(t,\phi(t,y))\cdot\partial_t\phi(t,y)J_y\phi(t,y)\, dy \\ &\quad + \int_\Omega f(t,\phi(t,y))\partial_t J_y\phi(t,y)\, dy.\end{aligned}$$

On se concentre sur les deux derniers termes. Comme ϕ est le flot du champ de vecteurs u, on a $\partial_t\phi(t,y) = u(t,\phi(t,y))$. D'autre part, exprimons la dérivée en temps du jacobien:

$$\partial_t \det(D_y\phi(t,y)) = (D\det)(D_y\phi(t,y))\cdot\partial_t D_y\phi(t,y).$$

D'un côté, on a $\partial_t D_y\phi(t,y) = D_y(u(t,\phi(t,y))) = \nabla_x u(t,\phi(t,y))D_y\phi(t,y)$, et de l'autre, on exprime la différentielle du déterminant[1], ce qui donne

$$(D\det)(D_y\phi(t,y))\cdot\nabla_x u(t,\phi(t,y)) = J_y\phi(t,y)\mathrm{div}\ u(t,\phi(t,y)).$$

[1]Pour la retrouver rapidement: traiter les matrices comme des vecteurs de $\mathbb{R}^{n^2}$; le développement du déterminant par rapport à une ligne/colonne met en évidence les dérivées partielles par rapport à la variable $m_{i,j}$, et ce sont les cofacteurs; d'où $(D\det)(M)\cdot H = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(M)\cdot H)$, et pour finir, on se rappelle que lorsque M est inversible, son inverse est reliée à sa comatrice...

On rassemble les deux morceaux, et on arrive à

$$\partial_t \int_{\phi(t,\Omega)} f(t,x)\ dx = \int_\Omega [\partial_t f + \mathrm{div}\ (fu)](t,\phi(t,y))J_y\phi(t,y)\ dy$$

On pousse en avant le dernier terme (changement inverse), et on applique le théorème de Gauss-Green au terme avec la divergence pour conclure.

Exercice 5 *Entraînements pour la résolution par caractéristiques - correction succinte*

1. *Résoudre l'EDP $\partial_t v + v^2\partial_x v = 0$ avec la donnée initiale*

$$v(0,x) = h^\varepsilon(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{si } 0 < x < \varepsilon \\ 1 & \text{si } x \geq \varepsilon \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$. Étudier le comportement des solutions lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

La solution est constante le long des caractéristiques, et ces caractéristiques sont des droites dirigées par la donnée initiale au carré. Le flot s'inverse explicitement, et on aboutit à

$$v(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{4tx+\varepsilon^2}-\varepsilon}{2t} & \text{si } 0 < x < t+\varepsilon \\ 1 & \text{si } x \geq t+\varepsilon. \end{cases}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient une solution identiquement nulle sur $\{(t,x) \mid x \leq 0\}$, identiquement égale à 1 sur $\{(t,x) \mid x \geq t\}$, et, entre les deux, une détente telle que $v^2(t,x) = x/t$.

2. *On considère le problème de Burgers $\partial_t v + v\partial_x v = 0$, avec une donnée initiale à trois états:*

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1 & \text{si } x \leq 0 \\ u_2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ u_3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Voir le corrigé de l'exercice 10 de la feuille 1 pour le calcul des caractéristiques de Burgers.

(a) *A quelle condition a-t-on une solution entropique continue à l'instant $t > 0$?*

La solution entropique est continue pour $t > 0$ si et seulement si u_0 est croissante, c'est-à-dire que $u_1 \leq u_2 \leq u_3$. La solution entropique sera alors constituée de trois bandes où la solution sera constante, reliées par deux ondes de raréfaction.

(b) *Déterminer la solution entropique pour $(u_1,u_2,u_3) = (0,1,0)$. Montrer qu'il y a un choc à tout instant $t > 0$, dont la vitesse et l'amplitude tendent vers 0.*

L'onde de raréfaction rattrape le choc. Il se passe deux choses différentes en $x = 0$ et en $x = 1$. Autour de 0, on a une détente: la solution sera de la forme $u(t,x) = x/t$ pour $0 < x < t$. Autour de 1, on a un choc: la condition de Rankine-Hugoniot donne que le choc progressera à la vitesse $\frac{1}{2}$.

Mais la détente, bordée par la caractéristique $x(t) = t$ rattrape le front de choc en $t = 2$: le choc entre deux valeurs constantes devient un choc entre la valeur x/t et la valeur 0. La condition de Rankine-Hugoniot indique alors que le choc se propage le long de la courbe $x = \sigma(t) = \sqrt{2t}$. La vitesse, $\sigma'(t)$ et l'amplitude, $\sigma(t)/t$, du choc sont en $1/\sqrt{t}$, donc tendent vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

(c) *Calculer la solution entropique pour* $(u_1, u_2, u_3) = (2, 1, 0)$.

Un choc en rattrape un autre. De $x = 0$ et $x = 1$, il part deux chocs: le premier à la vitesse $3/2$, le second, identique au cas (b), à la vitesse $1/2$. Le premier choc rattrape le second au temps $t = 1$, et un choc se poursuit entre les valeurs 2 et 0; ce choc se propage donc à la vitesse constante égale à 1.

(d) *Calculer la solution entropique pour* $(u_1, u_2, u_3) = (-1, 2, 0)$.

Même scénario qu'au (b): une onde de raréfaction partant de $x = 0$ rattrape au temps $t = 1$ un choc à vitesse 1 qui part de $x = 1$. Le choc se poursuit entre les valeurs x/t et 0, et il se propage suivant la courbe $x = \sqrt{2t}$.

Exercice 6 *Un petit problème de contrôle*

Soient a, T, $L > 0$. Dans le domaine $[0, T] \times [0, L]$, on s'intéresse à l'équation de transport ci-après:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + a\partial_x u &=& 0 \\ u(0, x) &=& u_0(x) \\ u(t, 0) &=& f(t), \end{array} \right. \tag{7}$$

où $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L])$ et $f \in \mathcal{C}^1(0, T)$ deux fonctions données.

1. *Résoudre le problème (7). A quelle condition sur u_0 et f existe-t-il une solution classique?*

Les caractéristiques du problème (7) sont les droites d'équation $x = at + x_0$, avec $x_0 \in [-aT, L]$, et la solution est constante le long de ces droites. Si $x \geq at$, la valeur de u est déterminée par la donnée initiale u_0, et si $x < at$, elle est déterminée par la donnée au bord f. On trouve que

$$u(t, x) = \left\{ \begin{array}{ll} u_0(x - at) & \text{si } \ at \leq x \geq L \\ f(t - \frac{x}{a}) & \text{si } \ 0 \leq x < at. \end{array} \right.$$

On remarque que c'est la restriction à $[0, T] \times [0, L]$ de la solution de l'équation de transport avec la donnée initiale

$$g_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(\frac{-x}{a}) & \text{si } \ x \in [-aT, 0) \\ u_0(x) & \text{si } \ x \in [0, L] \end{array} \right. \tag{8}$$

(ceci s'observe bien sur un dessin). Ainsi, la solution u n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T] \times [0, L]$ si la donnée g_0 n'est pas $\mathcal{C}^1$: il faut donc que

$$\lim_{t \to 0} f(t) = u_0(0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 0} f'(t) = -a u_0'(0) \tag{9}$$

pour que u soit une solution classique du problème.

Remarque: les conditions (9) sont appelées des conditions de compatibilité.

2. *L'équation de transport ci-dessus est dite contrôlable en temps T si, pour toute paire de données $(u_0, u_1) \in \mathcal{C}^1([0, L])$, il existe f telle que la solution de classe $\mathcal{C}^1$ de (7) satisfait*

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ et } u(T, x) = u_1(x).$$

(a) *Montrer que l'équation n'est pas contrôlable en temps $T < \frac{L}{a}$.*
Considérons $u_0 = 0$. Au temps $t = T$, la solution u satisfera $u(T, x) = 0$ pour $x > aT$, et par hypothèse, $aT < L$. Il suffit donc de prendre $u_1 \neq 0$ sur $[aT, L]$ pour contredire que le système serait contrôlable en temps $T < \frac{L}{a}$.

(b) *Montrer que, si $T > \frac{L}{a}$, l'équation est contrôlable en temps T. On explicitera le bon contrôle f.*

Si $T > \frac{L}{a}$, la valeur de la solution de l'équation de transport au temps T est entièrement déterminée par f. Pour obtenir $u(T, x) = u_1(x)$, il suffit de prendre

$$f(t) = u_1(a(T - t)) \text{ pour } T - \frac{L}{a} \leq t \leq T.$$

On exige, de plus, que la solution soit de classe $\mathcal{C}^1$. Il suffit, pour cela, de raccorder les morceaux disjoints (puisque $T - \frac{L}{a} > 0$) de la donnée g_0 correspondante (voir (8)) pour obtenir une fonction $\mathcal{C}^1$.

(c) *A quelle condition sur (u_0, u_1) pourra-t-on trouver un bon contrôle pour le temps $T = \frac{L}{a}$?*
Il est possible d'obtenir une solution satisfaisant $u(0, x) = u_0(x)$ pour $x \in [0, L]$, et $u(T, x) = u_1(x)$ pour $x \in [0, L)$ de la même façon que précédemment. Sauf qu'ici, $T - \frac{L}{a} = 0$, et, pour que le tout soit de classe $\mathcal{C}^1$, on doit considérer les conditions de compatibilité (9). On obtient les conditions

$$u_1(L) = u_0(0) \text{ et } u_1'(L) = u_0'(0).$$

II. Fonctions test

Exercice 7 *Éléments de $\mathcal{C}_c^\infty$*

1. *Soient $f(x) = e^{-x^2}$ et g définie par*

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) *Montrer que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. On montre par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_p tel que, pour $x \neq 0$

$$g^{(p)}(x) = P_p\left(\frac{1}{x}\right) g(x).$$

- Cas $p = 0$: on a $P_0 = 1$.

- Supposons que $g^{(p)}(x) = P_p(\frac{1}{x})g(x)$. Alors,

$$g^{(p+1)}(x) = \frac{-1}{x^2}P_p'\left(\frac{1}{x}\right)g(x) + \frac{2}{x^3}P_p\left(\frac{1}{x}\right)g(x) = P_{p+1}\left(\frac{1}{x}\right)g(x)$$

avec $P_{p+1}(X) = 2X^3P_p - X^2P_p'$.

Ainsi, $g^{(p)}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0, puisque pour tout polynôme P, on a $\lim_{x\to 0} P(1/x)g(x) = 0$.

(b) *Donner leurs développements en série de Taylor en 0.*

Pour tout p, on a les développements limités suivants:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-x^2)^k}{k!} + \mathcal{O}(x^{2p+2}) \quad \text{et} \quad g(x) = 0 + \mathcal{O}(x^p).$$

(c) *Ces fonctions sont-elles analytiques sur $\mathbb{R}$?*

La fonction f est analytique comme composée de fonctions analytiques. En revanche, si g étant analytique, elle serait égale à sa série de Taylor sur un voisinage de 0. Cette série est identiquement nulle, alors que $g(x) > 0$ dès que $x \neq 0$. Ainsi, g n'est pas analytique.

2. *Soient $R > 0$, $\varepsilon > 0$. Construire explicitement une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B(0,R) \\ 0 & \text{si } x \notin B(0,R+\varepsilon). \end{cases}$$

On commence par regarder la fonction

$$\rho : x \geq 0 \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [R, R+\varepsilon] \\ -g(x-R)g(x-R-\varepsilon) & \text{si } x \in [R, R+\varepsilon]. \end{cases}$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $[R, R+\varepsilon]$, et sa primitive $\Psi(x) = \int_{R+\varepsilon}^{x} \rho(y)\, dy$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $\Psi(x) \equiv 0$ si $x \geq R+\varepsilon$ et $\Psi(x) \equiv \Psi(R)$ si $x \leq R$.

La fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \frac{\Psi(|x|)}{\Psi(R)}$ répond alors à la question.

3. *Soit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, s'annulant sur $[0, l]$ pour un certain $l > 0$, et non nulle sur $[-l, 0[$. Montrer qu'une telle fonction n'est pas analytique sur $\mathbb{R}$.*

En déduire la liste de toutes les fonctions analytiques à support compact sur $\mathbb{R}$.

De même que pour montrer que g n'est pas analytique, on considère le développement en série de Taylor de la fonction. Comme la fonction est constante à droite de 0, cette série de Taylor doit être nulle, et si elle était analytique, elle serait donc nulle au voisinage de 0.

La seule fonction analytique à support compact est alors la fonction nulle.

Exercice 8

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

1. *Montrer que $\int_X f(x)\varphi(x)\ dx = \int_X g(x)\varphi(x)\ dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f = g$.*

Le sens $\Leftarrow$ est évident. Pour la réciproque, par linéarité de l'application $f \mapsto \int_X f\varphi\ dx$, on veut montrer que $\int_X f\varphi\ dx = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $f = 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ donnée et notons K son support. Prolongeons éventuellement f par 0 en dehors de X. On va montrer que $f|_K = 0$, et pour cela il suffit de montrer que $\int_K |f(x)|\ dx = 0$, car f est continue sur X et nulle en dehors.

Écrivons $|f(x)| = f(x)\mathrm{sgn}(f(x))$: $\psi := \mathrm{sgn}(f)$ est bornée sur K, donc appartient à $L^1(K)$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^1, il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ψ dans L^1. Par hypothèse, on a $\int_K f\varphi_p\ dx = 0$. Comme (φ_p) converge vers ψ dans L^1, on a $\varphi_p(x) \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(x)$ presque partout dans K. Ainsi, on a la majoration $|f(x)\varphi_p(x)| \leq |f(x)|$ presque partout dans K (on peut choisir (φ_p) de sorte que $\|\varphi_p\|_{L^\infty} \leq 1$), et $f \in L^1(K)$, donc le théorème de convergence dominée donne

$$\int_K f(x)\varphi_p(x)\ dx \overset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \int_K |f(x)|\ dx,$$

donc $\int_K |f(x)|\ dx = 0$. Ainsi, f est nulle dans K, pour $K \subset \mathbb{R}^n$ compact arbitraire.

2. *On pose $A = \sup\{\int_X f(x)\varphi(x)\ dx \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\ ,\ \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1\}$. Montrer l'équivalence $A < +\infty \Leftrightarrow f \in L^1(X)$, et que, si $A < +\infty$, $A = \|f\|_{L^1}$.*

Le sens $\Leftarrow$ est encore une fois très facile: si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, alors $\varphi \in L^\infty$, et, comme $f \in L^1$, par l'inégalité de Hölder, $f\varphi \in L^1$, et

$$\int_X |f\varphi|\ dx \leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}.$$

Ainsi, $A \leq \|f\|_{L^1}$ $(*)$, et donc A est fini.

Pour l'autre sens, commençons par le cas où f est à support compact. Alors on peut construire une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\mathrm{sgn}(f)$ dans L^1 et telle que $\|\varphi_p\|_{L^\infty} \leq 1$, et, comme précédemment, le théorème de convergence dominée donne

$$\int_X |f(x)|\ dx = \lim_{p\to+\infty} \int_X f(x)\varphi_p(x)\ dx \leq A.$$

A est supposé fini, donc $\int_X |f(x)|\ dx = \|f\|_{L^1}$ est fini. De plus, d'après $(*)$, on a $A = \|f\|_{L^1}$.

Dans le cas où f n'est plus à support compact, on utilise une suite exhaustive de compacts. Soit $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts vérifiant $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$, et $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} K_p = X$.

Par convergence monotone, on a $\|f\|_{L^1} = \sup_{p\in\mathbb{N}} \|f\mathbf{1}_{K_p}\|_{L^1}$, et, sur chacun des compacts K_p, on a

$$\|f\mathbf{1}_{K_p}\|_{L^1} = \sup\left\{\int_X f\varphi\mathbf{1}_{K_p}\ dx \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1\right\}.$$

Si on prend $\chi_p \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\mathbf{1}_{K_p} \leq \chi_p \leq \mathbf{1}_{K_{p+1}}$, on arrive à

$$\|f\|_{L^1} = \sup_{p\in\mathbb{N}} \sup \left\{ \int_X f\varphi\chi_p \, dx \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n), \ \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\} = A.$$

(en effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, il existe p_0 tel que $\varphi\chi_{p_0} = \varphi$)

Exercice 9

1. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$. Calculer*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, à support dans $[-R, R]$, et notons $K_\varepsilon = [-R, R]\setminus[-\varepsilon, \varepsilon]$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{K_\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx &= \int_{K_\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx + \int_{K_\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} \, dx \\
&= \int_{K_\varepsilon} \frac{\int_0^x \varphi'(y) \, dy}{x} \, dx + 0 \\
&= \int_{K_\varepsilon} \int_0^1 \varphi'(sx) \, ds \, dx
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variables $y = sx$. Comme $\varphi \in \mathcal{C}^1$, l'application $(s, x) \mapsto \varphi'(sx)$ est dans $L^1([0, 1]\times[-R, R])$, d'où, lorsque $\varepsilon \to 0$, la limite de $\int_{K_\varepsilon} \int_0^1 \varphi'(sx) \, ds \, dx$ existe et vaut $\int_{-R}^R \int_0^1 \varphi'(sx) \, ds \, dx$.

2. *Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ positive, avec $\varphi(0) = 0$, telle que $\int_\mathbb{R} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$ diverge.*

Une fonction positive et continue valant $\frac{1}{|\ln(x)|}$ pour $0 < x < e^{-1}$ convient. Cette fonction tend bien vers 0 en 0, et sur $]0, a[$, on a

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x|\ln(x)|} = (-\ln(|\ln(x)|))',$$

d'où l'intégrale $\int_0^{e^{-1}} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$ diverge.

Exercice 10 *Lemme de sommation de Borel*

1. *Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Énoncer une condition suffisante pour qu'il existe une fonction f analytique sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f^{(j)}(0) = a_j$ pour tout j.*

Si f est analytique sur $\mathbb{R}$, c'est que son développement en série entière à l'origine, $\sum_{j\geq 0} \frac{a_j}{j!} x^j$, a un rayon de convergence infini. Une condition suffisante pour satisfaire ceci se lit alors sur le critère de Cauchy:

$$\lim_{j\to+\infty} \left(\frac{|a_j|}{j!} \right)^{1/j} = 0.$$

2. *On montre dans la suite que, pour toute suite de réels (a_j), on peut construire une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi^{(j)}(0) = a_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.*

(a) *Proposer une fonction adéquate lorsque $a_j = 0$ pour $j > p$ pour un certain p.*

Si la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ stationne à 0, on est évidemment dans le cas où une fonction analytique vérifiant $f^{(j)}(0) = a_j$ existe, et il s'agit de la fonction polynômiale

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p} \frac{a_j}{j!} x^j.$$

On tronque la fonction f avec une fonction plateau (valant 1 sur un voisinage de 0), pour répondre à la question.

(b) *Cette fois, la suite (a_j) est quelconque. Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-1, 1]$ et valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$. Montrer qu'il existe une suite de nombres positifs $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que la série de fonctions de terme général*

$$\varphi_k(x) = \frac{a_k}{k!} x^k \chi\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)$$

soit uniformément convergente dans $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ pour tout p.

Pour p fixé, on doit majorer uniformément en x la dérivée p-ème de φ_k par le terme général d'une série convergente en k. La formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned}
\varphi_k^{(p)}(x) &= \frac{a_k}{k!} \sum_{l=0}^{p} C_p^l \frac{d^{p-l}}{dx^{p-l}} \left(\chi\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right)\right) (x^k)^{(l)} \\
&= a_k \sum_{l=0}^{p} C_p^l \frac{1}{\varepsilon^{p-l}(k-l)!} \chi^{(p-l)}\left(\frac{x}{\varepsilon_k}\right) x^{k-l}.
\end{aligned}$$

Comme le support de φ_k est compact (c'est $[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$), on n'a aucun mal à borner indépendamment de x. On borne aussi l'intérieur de la somme indépendamment de l: si $M_p = \max\limits_{l\in\{0,\cdots,p\}} C_p^l \|\chi^{(p-l)}\|_{L^\infty}$, on a

$$|\varphi_k^{(p)}(x)| \leq (p+1) M_p (|a_k| + 1) \varepsilon^{k-p}.$$

On peut maintenant choisir ε_k de sorte que la série de terme général $(|a_k|+1)\varepsilon^{k-p}$ converge.

Si la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ est absolument convergente, on n'a rien à faire, $\varepsilon_k = 1$ convient tout à fait. On va choisir ε_k donc pour gérer les séries non convergentes. Si $|a_k|$ est grand pour k grand, par exemple $|a_k| \geq 1$, on choisit $\varepsilon_k = \frac{1}{|a_k|+1}$, ainsi $(|a_k| + 1)\varepsilon_k^{k-p} = (|a_k| + 1)^{-k+p} \leq 2^{-k+p}$, qui est bien le terme général d'une suite convergente.

Globalement, on pose

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \frac{1}{|a_k|+1} & \text{si } |a_k| \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |a_k| \leq 1, \end{cases} \tag{10}$$

de sorte que, pour tout k, $(|a_k|+1)\varepsilon_k^{k-p} \leq 2^{-k+p+1}$. Alors, pour chaque p, on aura $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ uniformément convergente dans $\mathcal{C}^p$.

(c) *Vérifier que la somme de la série de fonctions* $\sum_{j\geq 0} \varphi_j$ *répond à la question.*

Comme la série $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément dans $\mathcal{C}^p$ pour tout p, la somme de la série est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout p, donc $\mathcal{C}^\infty$. La fonction ainsi construite est à support dans $[-1/2, 1/2]$, et on a

$$\varphi^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}[(x^k)^{(j)}]|_{x=0} = \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{k!a_k}{k!(k-j)!}[x^{k-j}]|_{x=0} = a_p.$$

Exercice 11 *Applications du lemme de Borel*

1. (a) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$. Prolonger f en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Pour prolonger f sur $]-\infty, a]$, on cherche une fonction f_a de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f_a^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ pour tout j. Une telle fonction existe d'après l'exercice 9, et f_a se recolle à f de sorte que le tout soit de classe $\mathcal{C}^\infty$. On fait la même chose en b.

(b) *Même question lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.*

Si on répète la construction ci-dessus en partant du point a, il se peut que le prolongement ne vérifie pas les conditions requises en b. Mais il suffit alors de tronquer la fonction f_a avec une fonction plateau de sorte qu'elle soit à support dans $[a, (a+b)/2]$, répéter la procédure en b.

2. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, paire. Montrer qu'il existe g de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout x, $f(x) = g(x^2)$.*

On recherche une fonction u qui vérifie, pour tout j, $(u(x^2))^{(j)}|_{x=0} = f^{(j)}(0)$. On peut montrer (preuve laissée au lecteur) que

$$(u(x^2))^{(2p+1)}|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad (u(x^2))^{(2p)} = c_p u^{(p)}(x) + \mathcal{O}(x^2),$$

avec $c_p > 0$. La première égalité est vérifiée car f est paire. On traduit la seconde par le fait qu'on cherche u vérifiant $u^{(j)}(0) = \frac{1}{c_j} f^{(2j)}(0)$. On construit une telle fonction avec le résultat de l'exercice 9, et la fonction $v(x) = f(x) - u(x^2)$ satisfait les exigences de l'indication.

On a donc $f(x) = u(x^2) + v(x)$, avec v paire. Si l'application $\tilde{v} : x \mapsto v(\sqrt{|x|})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors $v(x) = \tilde{v}(x^2)$, et on a la conclusion souhaitée. Vérifions donc que $\tilde{v}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0. Pour $x > 0$, on peut montrer par récurrence que, pour tout $m > 0$, il existe des coefficients $(c_{m,p})_{0\leq p\leq m}$ tels que

$$\tilde{v}^{(m)}(x) = \left(\frac{\operatorname{sgn}(x)}{2}\right)^m \sum_{p=1}^{m} c_{m,p} \frac{v^{(p)}(\sqrt{|x|})}{|x|^{m-p/2}}.$$

Du fait que v soit plate en 0, on a $v^{(p)}(s) = \underset{s\to 0}{\mathcal{O}}(s^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où tous les $\tilde{v}^{(m)}(x)$ et tous les taux d'accroissements $\frac{\tilde{v}^{(m)}(x)}{x}$ tendent vers 0 lorsque x tendent vers 0. Ainsi, $\tilde{v}$ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un prolongement de f au plan complexe noté $\tilde{f}$, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{C}$, vérifiant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p > 0$ telle que $|\partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)| \leq C_p|\mathrm{Im}(z)|^p$.*

Ce prolongement est appelé extension presque analytique de f. Justifier ce nom.

Ici, il faut bien comprendre que les contraintes sur le prolongement sont comprises dans l'objectif d'avoir $|\partial_{\bar{z}}\tilde{f}(z)| \leq C_p|\mathrm{Im}\,(z)|^p$ pour tout p. Cette inégalité signifie que la fonction $y \mapsto \partial_{\bar{z}}\tilde{f}(x+iy) = \partial_x\tilde{f}(x+iy) + i\partial_y\tilde{f}(x+iy)$ s'annule à tout ordre en 0, ce qui amène la condition $\partial_y\tilde{f}(x+i0) = if'(x)$. Il s'ensuit que $\partial_y^p\tilde{f}(x+i0) = i^p f^{(p)}(x)$ est la contrainte sur la dérivée à l'ordre p. Enfin, bien sûr, on cherche un prolongement de f, donc il faut avoir $\tilde{f}(x+i0) = f(x)$.

On applique l'exercice 9 pour en déduire que la fonction

$$\tilde{f}(x+iy) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^{(k)}(x)\frac{(iy)^k}{k!}\chi\left(\frac{y}{\varepsilon_k}\right)$$

avec la suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ choisie de la même façon qu'à (10), convient.

Cette extension est appelée prolongement presque analytique parce qu'on a $\partial_{\bar{z}}\tilde{f}$ plate au voisinage de la droite réelle. Rappelons qu'une fonction holomorphe g satisfait $\partial_{\bar{z}}g(z) = 0$ partout. A ce sujet, le lecteur réfléchir à donner la liste des fonctions entières à support compact...

UPMC, Master 1 Mathématiques, année 2014-2015
UE 4M046: Equations aux Dérivées Partielles

Corrigé TD 3

I. Exemples de distributions

Exercice 1

Montrer que les applications ci-après définissent des distributions.

1. $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} xy\varphi''(\sqrt{x^2+y^2})\, dx\, dy.$

La linéarité de l'application est claire. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support dans le carré $[-M, M]^2$. Alors

$$|<u,\varphi>| \leq \|\varphi''\|_\infty \int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} M^2\, dx\, dy = M^4\|\varphi''\|_\infty.$$

Pour donner l'expression exacte de cette distribution, on effectue le changement de coordonnées polaire:

$$\begin{aligned} <u,\varphi> &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} r\cos(\theta)\ r\sin(\theta)\ \varphi(r^2)\ r\ dr\ d\theta \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\ d\theta\right)\left(\int_0^{+\infty} r^3\varphi(r^2)\ dr\right) = 0 \end{aligned}$$

car l'intégrale en θ est nulle (intégrale d'une fonction continue impaire sur un intervalle centré en 0).

2. $\varphi \mapsto \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varphi^{(k)}(k).$

Remarquons d'abord que, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ donnée, la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\varphi^{(k)}(k)$ est convergente, car il s'agit une somme avec un nombre fini de termes. La linéarité de u est alors évidente, et, si $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-n, n]$ avec $n \in \mathbb{N}$, il est aussi clair que

$$|<u,\varphi>| \leq (n+1)\sup_{k\leq n}\|\varphi^{(k)}\|_\infty.$$

De plus, la distribution est d'ordre exactement n sur $]n-\varepsilon, n+\varepsilon[$, ainsi l'ordre de u comme distribution sur $\mathbb{R}$ n'est pas fini. On peut écrire $u = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\delta_k^{(k)}$.

3. $\varphi \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) \right]$.

La fonction φ étant dérivable en 0, la suite $\left(k\left[\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0)\right]\right)_{k\geq 1}$ est bornée (converge vers $\varphi'(0)$), ainsi

$$v_k := \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0)\right) = \underset{k\to+\infty}{\mathcal{O}} \frac{1}{k^{3/2}},$$

d'où la série de terme général v_k est convergente. On écrit $\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi(0) = \int_0^{1/k} \varphi'(x)\, dx$, et on en déduit

$$| < u, \varphi > | \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sup_{x\in[0,\frac{1}{k}]} |\varphi'(x)| \leq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \|\varphi'\|_\infty$$

On vérifie facilement que $\text{supp}(u) = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{\frac{1}{k}\right\}}$. L'inclusion $\supset$ est claire, et pour l'inclusion $\subset$, on montre que $< u, \varphi >= 0$ si $\text{supp}(\varphi) \subset]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ pour un certain n.

Exercice 2 *Ceci n'est pas une distribution.*

1. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ positive, non nulle. Montrer que, pour $j \in \mathbb{N}$, il existe $C,\ \beta > 0$ tels que $\int_0^{+\infty} e^{j/u}\varphi(u)\, du \geq Ce^{\beta j}$.*

Comme φ est non identiquement nulle, il existe un intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b = \frac{1}{\beta}$ sur lequel on a $0 < \frac{C}{b-a} \leq \varphi(u)$. D'où l'inégalité.

2. *Montrer que l'application $\varphi \mapsto \int_0^{+\infty} e^{1/t}\varphi(t)\, dt$ n'est pas une distribution sur $\mathbb{R}$.*

Supposons que cette application, que l'on nomme T, soit une distribution: il existe k tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$, on ait $| < T, \varphi > | \leq C' \sup_{l\leq k} \|\varphi^{(l)}\|_\infty$. Soit à présent $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ fixé, à support dans $[\frac{1}{2}, 1]$, et $\varphi_j(x) = \psi(jx)$ pour $j \geq 1$ entier. Alors, d'un côté,

$$\sup_{l\leq k} \|\varphi_j^{(l)}\|_\infty \leq j^k \sup_{l\leq k} \|\psi^{(l)}\|_\infty := Mj^k, \tag{1}$$

tandis qu'un changement de variable fait apparaître $< T, \varphi_j >$ comme une intégrale à la question 1, soit

$$< T, \varphi_j >= \frac{1}{j} \int_{1/2}^{1} e^{j/u}\psi(u)\, du \geq \frac{C}{j} e^{\beta j}. \tag{2}$$

En combinant les inégalités (1) et (2) avec le fait que T soit supposée être une distribution, on trouve que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on doit avoir $Ce^{\beta j} \leq C'Mj^{k+1}$, ce qui est impossible d'après le théorème des croissances comparées.

Exercice 3 *Valeur principale de $\frac{1}{x}$ et parties finies*

1. (a) *Montrer que* $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$*, vue comme distribution sur* $\mathbb{R}^*$*, est d'ordre 0.*

Le plus rapide est de remarquer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est un élément de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^*)$.

Une autre manière est de montrer l'inégalité de continuité. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^*)$. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}\backslash[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\backslash[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}\backslash[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Ainsi, si $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]\backslash[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, on obtient

$$\left| < \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi > \right| \leq \frac{2(M-\varepsilon_0)}{\varepsilon_0} \|\varphi\|_\infty,$$

ce qui montre que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, vue comme distribution sur $\mathbb{R}^*$, est d'ordre 0.

(b) *Montrer que* $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ *est une distribution d'ordre exactement 1 sur* $\mathbb{R}$*.*

Comme on a vu ci-dessus que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^*$, il faut trouver une suite dont le comportement en 0 permet de nier que l'on a $| < \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi > | \leq C\|\varphi\|_\infty$ pour tout φ à support dans $[-1, 1]$: on construit une suite bornée dans L^∞ dont les taux d'accroissement en 0 explosent.

On propose $\varphi_j(x) = \arctan(jx)\chi(x)$ avec χ une fonction plateau paire, valant 1 au voisinage de 0 et à support dans $[-1, 1]$. Cette suite est bien bornée dans L^∞, et on intègre sur $[\frac{1}{j}, 1]$. Pour $j \geq 3$, on a

$$\int_{\mathbb{R}\backslash[-1/j,1/j]} \frac{\varphi_j(x)}{x}\, dx = 2\int_{1/j}^{1} \frac{\arctan(jx)\chi(x)}{x}\, dx \geq 2\int_{1/j}^{1/2} \frac{\arctan(jx)}{x}\, dx.$$

On change la variable, $t = jx$, pour arriver à

$$\int_{1/j}^{1/2} \frac{\arctan(jx)}{x}\, dx = \int_{1}^{j/2} \frac{\arctan(t)}{t}\, dt \geq \frac{\pi}{4} \ln\left(\frac{j}{2}\right),$$

d'où $< \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_j > \overset{j \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. (a) *Soit* $-1 < \beta < 0$*. Montrer que la fonction* x_+^β *définie par* $x \mapsto x^\beta \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x)$ *est un élément de* $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$*.*

Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact. Il est évident que si $K \subset \mathbb{R}^{-*}$ ($x_+^\beta = 0$) ou si $K \subset \mathbb{R}^{+*}$ (x_+^β continue), la fonction x_+^β est intégrable. Si $K \subset [-R, R]$, on utilise le fait que x_+^β est positive pour écrire son intégrale sur $[-R, R]$:

$$\int_0^R x^\beta\, dx = \left[\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\right]_0^R = R^{\beta+1} - 0$$

car $\beta + 1 > 0$.

(b) *Soit $-2<\alpha<-1$. Montrer que* $\mathrm{Pf}(x_+^\alpha)$ *est une distribution d'ordre au plus 1, et qu'il existe une distribution A telle que, pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a*

$$<\mathrm{Pf}(x_+^\alpha),\varphi>=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}x^\alpha\varphi(x)\,dx-\varepsilon^{\alpha+1}<A,\varphi>\right).$$

On a que $<\mathrm{Pf}(x_+^\alpha),\varphi>=\frac{-1}{\alpha+1}<T_{x_+^{\alpha+1}},\varphi'>$, avec $T_{x_+^{\alpha+1}}$ la distribution associée à la fonction de L^1_{loc}, $x_+^{\alpha+1}$. On voit ainsi facilement que $\mathrm{Pf}(x_+^\alpha)$ est une distribution d'ordre exactement 1 (car c'est la dérivée d'une distribution associée à une fonction L^1_{loc} qui est forcément d'ordre 0).

Soit à présent $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $[-R,R]$. On a que

$$<\mathrm{Pf}(x_+^\alpha),\varphi>=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\int_\varepsilon^R x^{\alpha+1}\varphi'(x)\,dx\right),$$

et on peut intégrer par parties dans cette intégrale. Alors,

$$\begin{aligned}<\mathrm{Pf}(x_+^\alpha),\varphi> &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^R x^\alpha\varphi(x)\,dx-\frac{1}{\alpha+1}[x^{\alpha+1}\varphi(x)]_\varepsilon^R\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}x^\alpha\varphi(x)\,dx+\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon)\right).\end{aligned}$$

Or, $\varphi(\varepsilon)=\varphi(0)+\mathcal{O}(\varepsilon)$, donc $\varepsilon^{\alpha+1}\varphi(\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha+1}\varphi(0)+\mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha+2})$, avec $\alpha+2>0$, d'où le résultat souhaité avec $A=\frac{-1}{\alpha+1}\delta_0$.

(c) *Cas $\alpha=-1$. Montrer que la distribution $T_\varepsilon:\varphi\mapsto\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx+\ln(\varepsilon)\varphi(0)$ admet une limite lorsque $\varepsilon\to 0$. Quel est l'ordre de la distribution limite?*

Soit φ à support dans $[-R,R]$. On intègre par parties l'intégrale: on a alors

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx &= [\ln(x)\varphi(x)]_\varepsilon^R-\int_\varepsilon^{+\infty}\ln(x)\varphi'(x)\,dx,\\ \text{ainsi}\quad <T_\varepsilon,\varphi> &= -\int_\varepsilon^{+\infty}\ln(x)\varphi'(x)\,dx+\ln(\varepsilon)(\varphi(0)-\varphi(\varepsilon)).\end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, on remarque que

$$|\ln(\varepsilon)(\varphi(0)-\varphi(\varepsilon))|\leq\|\varphi'\|_\infty\varepsilon\ln(\varepsilon),$$

donc le terme de droite ci-dessus tend vers 0, tandis que le terme de gauche tend vers $\int_{\mathbb{R}}\ln(x)H(x)\varphi'(x)\,dx$, car la fonction $H\times\ln$ est bien L^1_{loc} sur $\mathbb{R}$. La distribution limite est donc la dérivée de la distribution associée à $H\ln$, et est donc d'ordre 1.

3. (a) *Montrer que* $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)'=-\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. *En déduire l'ordre de la distribution* $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

On écrit d'abord que $-<\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)',\varphi>=<\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),\varphi'>=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$, et on décompose cette intégrale: si φ est à support dans $[-R,R]$,

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx=\int_\varepsilon^R\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx+\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx.$$

On peut intégrer par parties dans chacune de ces intégrales, pour obtenir

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

La fonction $x \mapsto \varphi(x)+\varphi(-x)$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ et paire, elle admet le développement limité $\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon) = 2\varphi(0)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, d'où on a bien, en prenant $\varepsilon \to 0$, $< -\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)', \varphi > = < \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi >$.

On a montré dans la première partie que la valeur principale de $\frac{1}{x}$ étant d'ordre exactement 1, donc sa dérivée est d'ordre exactement 2.

(b) *Calculer* $x\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *et* $x^2\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

On écrit

$$< x\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi > = < \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), x\varphi > = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{(x\varphi)(0)}{\varepsilon}.$$

On a $(x\varphi)(0)=0$, ainsi on reconnaît immédiatement que $x\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.

De la même façon, on trouve $x^2\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1$.

Exercice 4 *Distributions périodiques*

Une distribution u est dite T-périodique sur $\mathbb{R}$, pour $T>0$, si $u=\tau_T u$, c'est-à-dire qu'on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $< u, \tau_{-T}\varphi > = < u, \varphi >$, avec $\tau_{-T}\varphi(x) = \varphi(x+T)$.

1. *Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\mathbb{C}$ vérifiant $|c_n| \leq C(1+|n|^m)$ pour un certain $m\in\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ converge dans $\mathcal{D}'$ vers une distribution périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$, et d'ordre au plus $m+2$.*

La série de distributions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ est convergente si et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} < c_n e^{in\omega x}, \varphi >$ est convergente. Il faut donc faire apparaître

$$< c_n e^{in\omega x}, \varphi > = b_n |n|^m \int_{\mathbb{R}} e^{in\omega x}\varphi(x)\,dx,$$

avec b_n bornée, comme le terme général d'une série convergente. Pour cela, on aurait besoin de voir cette expression comme $\frac{a_n}{n^2}$ avec a_n bornée. La fonction φ étant dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on peut intégrer par parties $m+2$ fois le terme intégral, et on arrive à

$$< c_n e^{in\omega x}, \varphi > = \frac{\left(\frac{i}{\omega}\right)^{m+2} b_n}{n^2} \int_{\mathbb{R}} e^{in\omega x}\varphi^{(m+2)}(x)\,dx, \tag{3}$$

avec $\left|\int_{\mathbb{R}} e^{in\omega x}\varphi^{(m+2)}(x)\,dx\right| \leq M\|\varphi^{(m+2)}\|_\infty$, où M dépend du support de φ.

Le membre de droite de (3) est donc bien le terme général d'une série convergente, et la majoration précédente montre que la distribution limite est d'ordre au plus $m+2$. La distribution limite est également périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$ car elle est somme de distributions périodiques de même période (vérification laissée au lecteur).

2. (a) *Soit u une distribution T-périodique. Construire une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(x+kT) = 1$ (partition de l'unité périodique), pour montrer qu'il existe $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ telle que $u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau_{kT} v$.*

Commençons par construire une partition de l'unité périodique. Étant donnée une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, positive et strictement non nulle sur $[0,T]$, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{kT}\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\cdot + kT)$ est uniformément convergente sur tout compact (c'est une somme avec un nombre fini de termes), donc sa somme est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose alors

$$\chi(x) = \frac{\varphi(x)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+kT)} :$$

on a bien que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(x+kT) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose à présent $v = \chi u$: il s'agit d'une distribution à support compact, d'où la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{kT} v$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Vérifions que $u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau_{kT} v$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$; on a d'abord $< v, \varphi > = < \chi u, \varphi > = < u, \chi\varphi >$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < \tau_{kT} v, \varphi > &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < v, \tau_{-kT}\varphi > \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} < u, \chi\tau_{-kT}\varphi > . \end{aligned}$$

Vu que u est T périodique, on a $< u, \chi\tau_{-kT}\varphi > = < u, \tau_{kT}\chi\varphi >$, et on insère la somme dans la droite du crochet pour obtenir

$$< \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau_{kT} v, \varphi > = < u, \varphi > .$$

(b) *Soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Montrer que la série ci-après définit une distribution T-périodique:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T} \overline{< v, e^{ik\omega x} >} e^{ik\omega x}.$$

D'après la question 1, il suffit de montrer que la suite $(< v, e^{ik\omega x} >)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à croissance polynomiale. Or, v étant à support compact, c'est une distribution d'ordre fini N, et il existe $K \subset \mathbb{R}$ compact tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{E}(\mathbb{R})$,

$$| < v, f > | \leq C \max_{0\leq l\leq N} \|f^{(l)}\|_{L^\infty(K)}.$$

Ici, on a alors $| < v, e^{ik\omega x} > | \leq C(1+|k|)^N$ (le 1 apparaît pour assurer le cas $k=0$), donc on peut appliquer le résultat de la première question.

(c) *En utilisant le résultat de la question (a) pour périodiser φ, montrer que pour toute distribution T-périodique u, il existe une suite $(c_k(u))_{k\in\mathbb{Z}}$ à croissance polynomiale telle que* $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{c_k(u)}{T} \exp\left(\frac{2i\pi k}{T}x\right)$.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $\tilde{\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau_{kT}\varphi$; il s'agit d'une fonction de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, périodique, qui admet donc un développement en série de Fourier

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_p(\tilde{\varphi})e^{ip\omega x},$$

avec $\tilde{c}_p(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{\varphi}(x)e^{-ip\omega x}\,dx = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-ip\omega x}\,dx =< e^{-ip\omega x}, \varphi >$.
La question 1 donne que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $< u, \varphi >=< v, \tilde{\varphi} >$, soit

$$\begin{aligned} < u, \varphi > &= < v, \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} < e^{ip\omega x}, \varphi > e^{-ip\omega x} > \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{< v, e^{ip\omega x} >}}{T} < e^{ip\omega x}, \varphi > \\ &= < \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{< v, e^{ip\omega x} >}}{T} e^{ip\omega x}, \varphi >, \end{aligned}$$

ce qui donne bien le développement en série de Fourier que l'on veut, avec les coefficients $c_p(u) = \overline{< \chi u, e^{ip\omega x} >}$.

3. Voir corrigé de la feuille 5.

II. Dérivation des distributions

Exercice 5

1. (a) *Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donnée, déterminer toutes les distributions vérifiant $u' = f$.*

Soit F une primitive de la fonction de f, et u telle que $u' = T_f$: si on montre que $(u-F)' = 0$, alors on aura prouvé que $u-F$ est une constante, ainsi les primitives de f au sens des distributions sont exactement ses primitives au sens usuel.
On écrit alors simplement, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} < (u-T_F)', \varphi > &= - < u - T_F, \varphi' >= - < u, \varphi' > + \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= < u', \varphi > - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx =< u' - T_f, \varphi >= 0, \end{aligned}$$

après intégration par parties. On a donc $u = T_F + C$, comme attendu.

(b) *Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Montrer que $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ est continue et vérifie $F' = f$ au sens des distributions.*

On ne pourra pas reproduire le raisonnement ci-dessus car l'intégration par parties n'est valable que pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et on n'a que le fait que F soit continue. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $|\varepsilon| \leq 1$, $F(x+\varepsilon) - F(x) = \int_x^{x+\varepsilon} f(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbf{1}_{[x,x+\varepsilon]}(t)\ dt$. On a que $f(t)\mathbf{1}_{[x,x+\varepsilon]}(t)$ tend vers 0 presque partout lorsque ε tend vers 0. De plus, $|f(t)\mathbf{1}_{[x,x+\varepsilon]}(t)| \leq |f(t)|\mathbf{1}_{[x-1,x+1]}(t)$, et cette fonction majorante est dans $L^1(\mathbb{R})$, donc une simple application du théorème de convergence dominée donne $F(x+\varepsilon) \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} F(x)$.

Explicitons $(T_F)'$: pour φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-R, R]$, on a

$$\begin{aligned} < (T_F)', \varphi > &= - < T_F, \varphi' >= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x f(t)\ dt \right) \varphi'(x)\ dx \\ &= - \int_{-R}^0 \int_0^x f(t)\varphi'(x)\ dt\ dx - \int_0^R \int_0^x f(t)\varphi'(x)\ dt\ dx. \end{aligned}$$

Comme l'application $(t, x) \mapsto f(t)\varphi'(x)$ est dans $L^1([-R, R]^2)$, on applique le théorème de Fubini pour intervertir les intégrales,

$$< (T_F)', \varphi >= - \int_{-R}^0 f(t) \left(\int_{-R}^t \varphi'(x)\ dx \right)\ dt - \int_0^R f(t) \left(\int_t^R \varphi'(x)\ dx \right)\ dt,$$

et on a que $\int_{-R}^t \varphi'(x)\ dx = \int_t^R \varphi'(x)\ dx = -\varphi(t)$. Ainsi,

$$< (T_F)', \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\ dt =< T_f, \varphi > .$$

2. (a) *Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction test $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ait une primitive à support compact est $\int_{\mathbb{R}} f = 0$.*

Supposons que f ait une primitive à support compact dans $[-R, R]$. Alors sa dérivée est à support dans le même compact, et $\int_{\mathbb{R}} f(t)\ dt = \int_{-R}^R f(t)\ dt = F(R) - F(-R) = 0$.

Réciproquement, si f est à support dans $[-R, R]$ et que $\int_{-R}^R f(t)\ dt = 0$, alors $F(x) = \int_{-R}^x f(t)\ dt$ est une primitive de f, et elle est à support compact.

(b) *Montrer qu'une solution de l'équation $S' = T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est connue sur les fonctions tests qui admettent une primitive à support compact.*

Soit S satisfaisant $S' = T$ et φ admettant une primitive à support compact ψ. Alors

$$< S, \phi >=< S, \psi' >= - < S', \psi >= - < T, \psi > .$$

Ainsi, l'action de S est connue sur $H = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ dx = 0\}$.

(c) *En déduire que toute distribution T admet une primitive sur $\mathbb{R}$, unique à une constante près, et la calculer.*

Donnons un peu plus de précision sur ce sous-espace H: il s'agit du noyau de la forme linéaire T_1 (la distribution associée à la fonction constante égale à 1), ainsi il s'agit d'un hyperplan de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit χ telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\ dx = 1$: alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{vect}(\chi)$, et on décompose $\varphi = \varphi_0 + \lambda\chi$, avec $\varphi_0 \in H$, dont ψ_0 est la primitive à support compact, et $\lambda = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ dx =< 1, \varphi >$.

On écrit alors $< S, \varphi >= - < T, \psi_0 > + << S, \chi > 1, \varphi >$, et la valeur de $< S, \chi >$ joue de le rôle de la constante libre.

Exercice 6 *Applications de la formule des sauts*

1. *Soit f définie par $f(x) = e^{\lambda x}$ pour $x > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ donné, et $f(x) = 0$ pour $x < 0$.*

(a) *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$(T_f)^{(k)} = \lambda^k T_f + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} \delta_0^{(j)}.$$

On peut le démontrer par récurrence. Tout d'abord, on remarque aisément que $f' = \lambda f$ au sens de la dérivée des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a alors facilement, par la formule des sauts, que $(T_f)' = \lambda T_f + (e^0 - 0)\delta_0$.

Supposons qu'on ait $(T_f)^{(k)} = \lambda^k T_f + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} \delta_0^{(j)}$ pour un certain k, et déterminons $(T_f)^{(k+1)} = ((T_f)^{(k)})'$. Par la formule des sauts, on a $\lambda^k (T_f)' = \lambda^{k+1} T_f + \lambda^k \delta_0$. La somme de dérivées de Dirac devient, quant à elle, en dérivant,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-1-j} \delta_0^{(j+1)} = \sum_{j=1}^{k} \lambda^{k-j} \delta_0^{(j)},$$

ce qui donne bien $\sum_{j=0}^{k} \lambda^{k-j} \delta_0^{(j)}$ en ajoutant le Dirac qui sort de la formule des sauts.

(b) *Soit $p(x) = \sum_{j=0}^{m} p_j x^j$ un polynôme de degré m ($p_m \neq 0$) qui admet pour racine λ. On note $p(\partial)$ l'opérateur différentiel qui à $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associe la distribution $\sum_{j=0}^{m} p_j u^{(j)}$. Quel est l'ordre de $p(\partial) T_f$?*

Développons l'expression de $p(\partial) T_f$: au sens des distributions, on a

$$\begin{aligned} p(\partial) T_f &= \sum_{k=0}^{m} p_k (T_f)^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} \left[p_k \lambda^k T_f + \sum_{j=0}^{k-1} p_k \lambda^{k-1-j} \delta_0^{(j)} \right] \\ &= p(\lambda) T_f + \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k-1} p_k \lambda^{k-1-j} \delta_0^{(j)}. \end{aligned}$$

Comme $p(\lambda)$ est nul, il reste la somme de dérivées de δ_0. Le terme portant la dérivée à l'ordre le plus élevé dans cette somme est $p_m \delta_0^{(m-1)}$ ($k = m$, $j = m - 1$), où $p_m \neq 0$, ce qui donne que $p(\partial) T_f$ est d'ordre $m - 1$.

2. *Calculer $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \left(H(x) \frac{\sin(\omega x)}{\omega} \right)$.*

Notons $f(x) = H(x) \sin(\omega x)$. On observe que f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la formule des sauts donne $(T_f)' = T_{f'}$, où $f'(x) = \omega H(x) \cos(\omega x)$. On dérive une deuxième fois: cette fois, le saut en 0 est d'amplitude ω, donc $(T_f)'' = T_{f''} + \omega \delta_0$, et $f'' = -\omega^2 f$. Ainsi $\frac{1}{\omega}[(T_f)'' + \omega^2 T_f] = \omega(-T_{f''} + T_{f''}) + \delta_0 = \delta_0$.

Exercice 7 *Équations différentielles dans $\mathcal{D}'$*

1. *Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $xT = C$, avec $C \in \mathbb{R}$.*

Il s'agit d'une équation linéaire non-homogène, donc l'ensemble des solutions a une structure affine. On connaît une solution particulière de l'équation, $T = C\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, donc il nous suffit de trouver les solutions de l'équation homogène $xu = 0$, et les solutions de $xT = C$ sont alors de la forme $T = C\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + u$.

Le théorème 3.2.8 du poly *Real Analysis* résout $x^n u = 0$; dans ce corrigé, on donne une autre approche. Vu que $< xu, \varphi >=< u, x\varphi >$, on remarque que la distribution T s'annule sur l'ensemble

$$\begin{aligned} H &= \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \ \text{ telle que } \ \varphi = x\psi\} \\ &= \{\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \mid \varphi(0) = 0\} \end{aligned}$$

(on laisse vérifier cette égalité). L'ensemble H est un hyperplan de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc on écrit $\varphi = \varphi_0 + \varphi(0)\chi$, où $\varphi_0 \in H$ et χ vérifie $\chi(0) = 1$. Alors on trouve que $u = \lambda\delta_0$, puisque $< u, \varphi >=< u, \varphi_0 > +\varphi(0) < u, \chi >= \lambda < \delta_0, \varphi >$.

2. *Résoudre $x^n T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Adaptons cet argument à $x^n T = 0$. On remarque cette fois que T s'annule sur l'ensemble H_n des fonctions qui s'annulent à l'ordre n en 0: c'est un sous-espace de $\mathcal{D}(R)$ de codimension n. En réutilisant χ de la question 1, un supplémentaire de H_n est $\mathrm{vect}(\chi, x\chi, \cdots, x^{n-1}\chi)$: alors une identification en 0 donne la décomposition

$$\varphi = \varphi_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \chi,$$

avec $\varphi_n \in H_n$, ainsi $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \delta_0^{(k)}$, où $\mu_k = \frac{<T, x^k\chi>}{k!}$.

3. *Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle $xu' + u = 0$.*

Cette équation différentielle se résout simplement, en remarquant que $xu' + u = (xu)'$. Dès lors, on résout $(xu)' = 0$, ce qui implique que $xu = C$ pour $C \in \mathbb{R}$, équation résolue à la question 1.

III. Limites de distributions

Exercice 8

Calculer les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des suites de distributions sur $\mathbb{R}$ définies par les fonctions suivantes: $S_n(x) = \dfrac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}$ et $T_n(x) = n^2 \cos(nx) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$.

Les distributions S_n et T_n sont identifiées à des fonctions L^1_{loc}, leurs actions sur φ s'écrivent donc sous forme d'intégrales.

On change la variable dans $< S_n, \varphi >$; en posant $y = nx$,

$$< S_n, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \frac{n\varphi(x)}{\pi(1+n^2x^2)}\ dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+y^2)}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\ dy.$$

L'intégrande tend vers $\frac{\varphi(0)}{\pi(1+y^2)}$ pour tout y, et on a la domination

$$\left|\frac{1}{\pi(1+y^2)}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\right| \leq ||\varphi||_\infty \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée s'applique, et on a donc

$$< S_n, \varphi > \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\pi(1+y^2)} = \varphi(0)$$

(l'intégrande est la densité de la loi de Cauchy), ainsi S_n converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers δ_0.

Pour la seconde limite, on intègre deux fois par partie pour écrire

$$< T_n, \varphi >= -\varphi'(0) - \int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi''(x)\ dx.$$

On reconnaît d'une part l'action de δ_0', et d'autre part, en écrivant $\cos(nx) = \operatorname{Re}\left(e^{-inx}\right)$ et en introduisant la partie paire de φ'', $\psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi''(x) + \varphi''(-x))$,

$$\int_0^{+\infty} \cos(nx)\varphi''(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-inx}\psi(x)\ dx = \hat{\psi}(n),$$

où les $\hat{\psi}$ est la transformée de Fourier de $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. Par le lemme de Riemann-Lebesgue, $\lim\limits_{n\to+\infty} \hat{\psi}(n) = 0$, ainsi T_n tend dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers δ_0'.

Exercice 9 *Une autre valeur principale*

1. *Montrer que l'application* $\mathrm{vp}\left(\frac{\cos\lambda x}{x}\right)$ *est une distribution.*

On remarque que

$$< \mathrm{vp}\left(\frac{\cos(\lambda x)}{x}\right), \varphi >=< \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \cos(\lambda x)\varphi >,$$

d'où l'application est bien une distribution d'ordre 1.

2. *Montrer que* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{vp}\left(\frac{\cos\lambda x}{x}\right) = 0$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Si φ est à support dans $[-R, R]$, on se sert de l'écriture

$$< \mathrm{vp}\left(\frac{\cos(\lambda x)}{x}\right), \varphi >= \int_0^R \cos(\lambda x)\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\ dx,$$

et posons $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$. Essayons en changeant la variable $y = \lambda x$. Alors

$$< \mathrm{vp}\left(\frac{\cos(\lambda x)}{x}\right), \varphi >= \int_0^{\lambda R} \cos(y)\frac{\psi(\frac{y}{\lambda})}{\lambda}\ dy.$$

Bien que $\frac{\psi(y/\lambda)}{\lambda}$ tende vers 0 pour tout y, le domaine d'intégration est problématique: on n'a pas de borne uniforme pour $\cos(y)\mathbf{1}_{[0,\lambda R]}(y)$. Ainsi, on échoue à faire appliquer le théorème de convergence dominée dans cette configuration.

Intégrons par parties: on a

$$\int_0^R \cos(\lambda x)\psi(x)\,dx = \left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\psi(x)\right]_0^R - \int_0^R \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\psi'(x)\,dx.$$

Les termes de bord sont tous les deux nuls, et on peut appliquer le théorème de convergence dominée à l'intégrale restante. En effet, on a

$$\left|\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\psi'(x)\right| \leq \frac{|\psi'(x)|}{\lambda} \leq |\psi'(x)|$$

pour $\lambda > 1$; la première inégalité prouve que l'intégrande tend vers 0, et la deuxième donne une majoration uniforme par une fonction L^1.

Donc $\mathrm{vp}\left(\frac{\cos(\lambda x)}{x}\right)$ converge bien vers 0 au sens des distributions lorsque $\lambda \to +\infty$.

Exercice 10 *Convergence presque partout vs convergence dans $\mathcal{D}'$*

Construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x))_n$ converge vers 0 presque partout, mais $(f_n)_n$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Construire une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(g_n(x))_n$ converge vers 0 presque partout, mais $(g_n)_n$ converge vers δ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Résolvons les deux questions simultanément. Il s'agit de trouver deux suites de fonctions L^1 qui convergent presque partout vers 0, mais dont les distributions associées ne convergent pas vers 0. En fait, ces contre-exemples sont les mêmes que pour montrer que la convergence presque partout n'implique pas la convergence dans L^1.

Soient $g_n = n\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$ et $f_n = n^2\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]} = ng_n$. Alors, d'une part, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a facilement, par convergence dominée, que

$$< T_{g_n}, \varphi > \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >,$$

tandis qu'en prenant χ une fonction plateau valant 1 au voisinage de 0, on a $< T_{f_n}, \chi >= n$ pour n assez grand, donc T_{f_n} ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 11 *Noyau de l'équation de la chaleur*

1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et on pose, pour $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$ au sens des distributions.*

Comme $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$, l'action de la distribution T_{f_ε} est donnée par

$$< T_{f_\varepsilon}, \varphi >= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(\varepsilon y)\,dy,$$

en effectuant le changement de variables $y = \frac{x}{\varepsilon}$. On a, d'une part, pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(y)\varphi(\varepsilon y) = f(y)\varphi(0),$$

et $|f(y)\varphi(\varepsilon y)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(y)|$, avec $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donc le théorème de convergence dominée s'applique:

$$< T_{f_\varepsilon}, \varphi > \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(0)\ dy = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ dy\right) < \delta_0, \varphi > .$$

2. *Soit* $u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)$. *Montrer que* u *est solution de l'équation de la chaleur* $\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x)$, *pour* $t \in]0,+\infty[$, $x \in \mathbb{R}^n$.

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, donc on calcule ses dérivées directement. D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\left(\frac{-n}{2t^{1+n/2}} + \frac{4|x|^2}{(4t)^2 t^{n/2}}\right)\exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right) \\
&= \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) u(t,x).
\end{aligned}$$

D'autre part, on utilise le fait que $\Delta = \text{div}\ \nabla$:

$$\begin{aligned}
\nabla u(t,x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right)\frac{-x}{2t} = -\frac{u(t,x)}{2t}x, \\
\text{d'où}\quad \Delta u(t,x) &= \frac{-1}{2t}\text{div}\ (u(t,x)x) = \frac{-1}{2t}(\nabla u(t,x)\cdot x) - \frac{1}{2t}u(t,x)\text{div}\ x \\
&= \frac{1}{4t^2}u(t,x)(x\cdot x) - \frac{n}{2t}u(t,x) = \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right)u(t,x).
\end{aligned}$$

Donc u satisfait bien $\partial_t u = \Delta u$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.

3. *Déterminer dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *les limites* $\lim_{t\to 0} u(t,x)$ *et* $\lim_{t\to 0} \partial_t u(t,x)$. *En déduire l'EDP satisfaite par* u *au sens des distributions sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

En posant $\varepsilon = 2\sqrt{t}$ et $f(y) = \frac{1}{\pi^{n/2}}e^{-|y|^2}$, $u(t,x) = \varepsilon^{-n} f(\frac{x}{\varepsilon})$, avec f gaussienne, donc L^1. On a $\int_{\mathbb{R}} f(y)\ dy = 1$, donc la limite de $u(t,\cdot)$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}^n$ est δ_0. Ensuite, pour tout $t > 0$, on a $\partial_t u(t,\cdot) = \Delta u(t,\cdot)$, donc

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} < T_{\partial_t u(t)}, \varphi > &= \lim_{t\to 0} < T_{\Delta u(t)}, \varphi > = \lim_{t\to 0} < T_{u(t)}, \Delta\varphi > \\
&= < \delta_0, \Delta\varphi > = < \Delta\delta_0, \varphi > = < \Delta\left(\lim_{t\to 0} T_{u(t)}\right), \varphi > .
\end{aligned}$$

La distribution v associée à la fonction $v(t,x) = u(t,x)H(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ vérifie alors

$$\partial_t v = \partial_t u H(t) + u(t,x)\delta_{t=0} = \Delta u H(t) + \delta_{t=0} \otimes \left(\lim_{t\to 0} u(t)\right) = \Delta v + \delta_{(t,x)=(0,0)}.$$

UPMC, Master 1 Mathématiques, année 2014-2015
UE 4M046: Equations aux Dérivées Partielles

Corrigé TD 4

I. Convolution de distributions

Exercice 1

Soient $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et P un polynôme à coefficients complexes de degré au plus $d \geq 0$. Montrer que $u * P$ est également un polynôme de degré au plus d.

Par linéarité de la convolution, il est clair qu'il suffit de montrer que $u * (x^d)$ est un polynôme de degré au plus d. Comme u est une distribution à support compact et que $x \mapsto x^d$ est une fonction L^1_{loc} sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$< u * (x^d), \varphi > = < u, < x^d, \varphi(x + \cdot) > > = < u(y), \int_{\mathbb{R}} x^d \varphi(x+y)\, dx > .$$

En changeant la variable dans l'intégrale, $z = x + y$, et en utilisant la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned} < u * (x^d), \varphi > &= \sum_{k=0}^{d} C_d^k < u(y), (-y)^{d-k} \int_{\mathbb{R}} z^k \varphi(z)\, dz > \\ &= \sum_{k=0}^{d} C_d^k < u, (-y)^{d-k} >_{\mathcal{E}' \times \mathcal{E}} \quad < x^k, \varphi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}, \end{aligned}$$

En posant $p_k = C_d^k < u, (-y)^{d-k} >_{\mathcal{E}' \times \mathcal{E}}$, on obtient bien que $u * (x^d)$ s'identifie au polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} p_k x^k$.

Exercice 2

Déterminer toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a $< u, \varphi * \psi > = < u, \varphi > < u, \psi >$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ fixé tel que $< u, \varphi > \neq 0$. On remarque que $\varphi * \psi' = (\varphi * \psi)' = \varphi' * \psi$, car φ et ψ sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, $< u, \varphi * \psi' > = < u, \varphi' * \psi >$, et donc

$$< u, \varphi > < u, \psi' > = - < u, \varphi > < u', \psi > = < u, \varphi' > < u, \psi > .$$

On est alors ramené à résoudre $u' = cu$, où $c = \frac{- < u, \varphi' >}{< u, \varphi >}$.

Si u est représentée par une fonction $\mathcal{C}^1$, alors on a $u(x) = K e^{cx}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Il s'agit alors de justifier qu'il s'agit des seules solutions. Pour cela, on montre que l'ensemble des solutions de $u' = cu$ forme une droite vectorielle de $\mathcal{D}'$. Soient $u = e^{cx}$ et v deux solutions de l'équation: on veut montrer que $u = mv$ pour un certain $m \in \mathbb{R}$.

Comme $u(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non nulle en tout point, on peut considérer la distribution $\frac{v}{u}$. Dérivons-la:

$$\begin{aligned} < \left(\frac{v}{u}\right)', \varphi > &= - < \frac{v}{u}, \varphi' > = - < v, \frac{\varphi'}{u} > \\ &= - < v, \left(\frac{\varphi}{u}\right)' + \frac{\varphi u'}{u^2} > = < v', \frac{\varphi}{u} > - < v, \frac{\varphi u'}{u^2} > . \end{aligned}$$

D'après l'équation, on a $v' = cv$ au sens des distributions, et $u' = cu$ en tant que fonction, d'où on trouve bien

$$< \left(\frac{v}{u}\right)', \varphi > = < cv, \frac{\varphi}{u} > - < v, c\frac{\varphi}{u} > = 0.$$

Exercice 3 *Convolution et dérivation*

1. *Montrer que l'application $\sigma : (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mapsto x + y$ est propre. En déduire que la distribution $H * H$ est bien définie. Expliciter $H * H$ ainsi que toutes ses dérivées.*

L'application σ est continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$, donc l'image réciproque d'un compact est un fermé. Il suffit donc de montrer que l'image réciproque d'un borné de $\mathbb{R}^+$ est borné. Ceci est aisé: l'ensemble $\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid 0 \leq x + y \leq b\}$ est inclus dans $[0, b]^2$. L'application σ est donc propre. Le support de H est donc convolutif avec lui-même, donc la distribution H est convoluable avec elle-même.

La définition de la convolée donne alors, pour χ fonction $\mathcal{C}^\infty$ valant 1 sur $[0, +\infty[$ et à support dans $[-\varepsilon, +\infty[$,

$$< H * H, \varphi > = < H \otimes H, \chi(x)\chi(y)\varphi(x + y) > .$$

$H \otimes H$ étant dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$< H * H, \varphi > = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \varphi(x + y)\; dx\; dy = \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^z \varphi(z)\; dx\; dz$$

en posant $z = x + y$. On a ainsi $< H * H, \varphi > = \int_{\mathbb{R}^+} z\varphi(z)\; dz$, donc on identifie $H * H = xH(x)$.

(on pouvait aussi utiliser la formule pour deux fonctions L^1_{loc} à supports convolutifs proposée au début de la section 3.5.3 du poly RA)

Sa dérivée est immédiatement vue comme étant

$$(H * H)' = H * H' = H * \delta_0 = H,$$

d'où $(H * H)'' = \delta_0$, et $(H * H)^{(n)} = \delta_0^{(n-2)}$ pour $n \geq 2$.

2. *Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ d'ordre 0. Montrer que $u * H * H$ est une distribution associée à une fonction continue.*

Comme $u \in \mathcal{E}'$ et $H * H \in \mathcal{D}'$, on a

$$\begin{aligned} < u * H * H, \varphi > &= < u(x), < H * H(y), \varphi(x + y) >> \\ &= < u(x), \int_{\mathbb{R}} yH(y)\varphi(x + y)\; dy > \\ &= \int_{\mathbb{R}} < u(x), (z - x)H(z - x) > \varphi(z)\; dz, \end{aligned}$$

ce qui montre que $u * H * H$ est représenté par la fonction L^1_{loc}

$$g_0 : z \mapsto < u, (H * H)(z - \cdot) > = < u, (z - \cdot)H(z - \cdot) >,$$

crochet interprétable dans $(\mathcal{C}^0)' \times \mathcal{C}^0$ vu que la distribution u est d'ordre 0 (proposition 3.1.12 du poly). Il reste à montrer que cette fonction est continue: ceci se voit sur l'inégalité de continuité. En effet, si on prend $z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(z_1) - g(z_2)| &= | < u, (z_1 - \cdot)H(z_1 - \cdot) - (z_2 - \cdot)H(z_2 - \cdot) > | \\ &\leq C\|(z_1 - \cdot)H(z_1 - \cdot) - (z_2 - \cdot)H(z_2 - \cdot)\|_\infty \leq C|z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

3. *Quel est l'effet de la convolution avec H du point de vue de la dérivation des distributions à support compact? En déduire que toute distribution de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ d'ordre p est la dérivée à l'ordre $p+2$ d'une fonction continue.*

Si on dérive $u * H$, on obtient $(u * H)' = u * H' = u * \delta_0 = u$: $u * H$ est donc une primitive de u. D'après ce que l'on a vu ci-dessus, $u * H * H$ est une fonction continue, et sa dérivée seconde est u, d'où la propriété est montrée pour $p = 0$.

Si $u \in \mathcal{E}'$ est d'ordre p, on répète la preuve ci-dessus en convolant avec $H^{*(p+2)}$, qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$. Le crochet définissant

$$g_p : z \mapsto < u, (H^{*(p+2)})(z - \cdot) >$$

est alors compris dans le sens de la dualité $(\mathcal{C}^p)' \times \mathcal{C}^p$. g_p est alors une fonction continue de z, et sa dérivée $p + 2^{\text{ième}}$ au sens des distributions est u.

Exercice 4 *Equation de Volterra dans $\mathcal{D}'$*

On note $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp}(u) \subset [0, +\infty[\}$. Soit $K \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ à support dans $\mathbb{R}^+$.

L'objectif de l'exercice est de prouver que

$$\forall v \in \mathcal{D}'_+ \ , \ \exists! u \in \mathcal{D}'_+ \ \text{ tel que } \ u - K * u = v. \tag{1}$$

1. *Montrer que si $\operatorname{supp}(K) \subset [\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} K^{*n}$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En déduire que (1) est vraie dans ce cas.*

Il s'agit donc de trouver un inverse de l'application linéaire $u \in \mathcal{D}'_0 \mapsto (Id - K*)u$, où $Id = \delta_0 *$. Du moins formellement, cet inverse est $u \mapsto \left(\sum_{n\geq 0} K^{(*n)}\right) * u$.

Supposons $\operatorname{supp}(K) \subset [\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$. Comme $\operatorname{supp}(K) \subset \mathbb{R}^+$, la distribution K est convoluable avec elle-même, et on a

$$< K^{(*n)}, \varphi > = \int_{[\varepsilon, +\infty[^n} K(x_1) \cdots K(x_n) \varphi(x_1 + \cdots x_n)\ dx_1 \cdots dx_n.$$

En changeant une variable, $s = x_1 + \cdots + x_n$, on a

$$< K^{(*n)}, \varphi > = \int_{[\varepsilon, +\infty[^{n-1}} \int_{n\varepsilon}^{+\infty} K(s - x_2 - \cdots - x_n) K(x_2) \cdots K(x_n) \varphi(s)\ ds\ dx_2 \cdots dx_n.$$

La fonction φ étant à support compact, il existe N tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap [N\varepsilon, +\infty[= \emptyset$, d'où $< K^{(*n)}, \varphi >= 0$ pour $n \geq N$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} K^{(*n)}$ converge dans $\mathcal{D}'$ et est à support dans $\mathbb{R}^+$, donc le problème de Volterra admet bien une solution, qui est

$$u = (Id - K*)^{-1} v = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} K^{(*n)} \right) * v.$$

2. *Montrer que (1) est vraie lorsque* $\operatorname{supp}(K) \subset [0, +\infty[$. *Pour ce faire, décomposer le noyau de la façon suivante:* $K = K_1 + K_2$, *avec* $\|K_1\|_{L^1} < 1$ *et* $\operatorname{supp}(K_2) \subset [\varepsilon, +\infty[$ *pour un certain* ε.

Lorsque $\operatorname{supp}(K) \subset \mathbb{R}^+$, on ne peut bien sûr pas réitérer l'argument. On inverse donc en deux étapes: si on écrit $K = K_1 + K_2$ avec $\|K_1\|_{L^1} < 1$ et $\operatorname{supp}(K_2) \subset [\varepsilon, +\infty[$ (en prenant par exemple ε de sorte que $\int_0^\varepsilon K(x)\, dx = \frac{1}{2}$ et $K_2 = K\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}$), on a que la série $\sum_{n\geq 0} K_1^{(*n)}$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$, on a $(Id - K_1*)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} K_1^{(*n)} \right) *$, et

$$(Id - (K_1 - K_2)*) = (Id - K_1*) \left[Id - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} K_1^{(*n)} \right) * K_2* \right].$$

Comme K_2 est à support dans $[\varepsilon, +\infty[$ et que K_1 est à support dans $\mathbb{R}^+$, la distribution $\tilde{K} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} K_1^{(*n)} \right) * K_2$ est à support dans $[\varepsilon, +\infty[$, ainsi on peut appliquer la question 1 pour inverser $Id - \tilde{K}*$. Il résulte que le problème de Volterra admet bien une solution, qui est

$$u = (Id - \tilde{K}*)^{-1} (Id - K_1*)^{-1} v = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{K}^{(*n)} \right) * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} K_1^{(*n)} \right) * v.$$

Exercice 5 *Calculs de convolutions*

Déterminer les distributions suivantes (on justifiera au préalable pourquoi les distributions en jeu sont convoluables).

1. On a vu à l'exercice 3 que $\mathbb{R}^+$ est convolutif avec lui-même, donc H et f sont convoluables. De plus, on a vu que $H * f$ est une primitive de f. Sachant $\operatorname{supp}(H * f) \subset \mathbb{R}^+$, on a $H * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et $H * f(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

2. En tant que distribution, $\mathbf{1}_{[a,b]}$ est à support compact. Les fonctions f et $\mathbf{1}_{[a,b]}$ sont donc convoluables, et on a

$$\mathbf{1}_{[a,b]} * f(x) = \int_a^b f(x - y)\, dy = \int_{x-b}^{x-a} f(z)\, dz. \tag{2}$$

Il vient que $(\mathbf{1}_{[a,b]} * f)'(x) = \int_{x-b}^{x-a} f'(z)\, dz = f(x - a) - f(x - b)$.

3. La formule (2) marche encore pour $f = \mathbf{1}_{[c,d]}$. Il résulte que:

$$\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-b>d \text{ ou } x-a<c \\ b-a & \text{si } b-a<d-c \text{ et } c<x-b<x-a<d \\ d-c & \text{si } d-c<b-a \text{ et } x-b<c<d<x-a \\ d-x+b & \text{si } c<x-b<d<x-a \\ x-a-c & \text{si } x-b<c<x-a<d \end{cases}$$

4. Les deux masses de Dirac sont à support compact, donc convoluables. Le résultat n'est pas, en revanche, une fonction L^1_{loc} *a priori* (ça n'a même aucune chance de l'être, puisque $\operatorname{supp}(\delta_a * \delta_b) \subset \{a\} + \{b\} = \{a+b\}$). On calcule donc:

$$<\delta_a * \delta_b, \varphi> = <\delta_a(x), <\delta_b(y), \varphi(x+y)>> = <\delta_a, \varphi(\cdot + b)> = \varphi(a+b) = <\delta_{a+b}, \varphi> .$$

5. Les fonctions considérées sont toutes à support dans $\mathbb{R}^+$, donc convoluables.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} (H\sin * H\cos)(x) &= \int_{\mathbb{R}} H(y)H(x-y)\sin(y)\cos(x-y)\ dy \\ &= H(x)\int_0^x \sin(y)\cos(x-y)\ dy. \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale, on utilise une formule de trigonométrie pour écrire

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin(y)\cos(x-y)\ dy &= \frac{1}{2}\int_0^x \sin(x) - \sin(2y-x)\ dy, \\ \text{d'où}\ \ (H\sin * H\cos)(x) &= \frac{1}{2}x\sin(x)H(x) - \frac{1}{4}H(x)[\cos(2y-x)]_0^x \\ &= \frac{1}{2}x\sin(x)H(x). \end{aligned}$$

D'autre part, on a rapidement que

$$(H\exp)^{*2}(x) = H(x)\int_0^x e^y e^{x-y}\ dy = e^x H(x)\int_0^x 1\ dy = xe^x H(x).$$

II. Solutions fondamentales

Exercice 6 *Convolution et dérivation, suite*

1. *Pour $k \geq 0$, interpréter $H^{(*k)}$ comme la solution fondamentale d'un certain opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$. Construire alors une solution fondamentale de l'opérateur $\partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Comme $H' = \delta_0$ et les $H^{(*k)}$ sont les primitives successives de H, on a $(H^{(*k)})^{(k)} = \delta_0$. La distribution $H^{(*k)}$ est donc une solution fondamentale de l'opérateur ∂^k sur $\mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^n$, une solution fondamentale de l'opérateur $D_k = \partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}$ sur $\mathbb{R}^n$ peut donc être construit comme produit tensoriel des distributions $H^{(*k_i)}(x_i)$, avec la convention $H^{(*0)} = \delta_0$. Ainsi,

$$E(k)(x) = H^{(*k_1)}(x_1) \otimes \cdots \otimes H^{(*k_n)}(x_n)$$

est une solution fondamentale de l'opérateur D_k. En effet,

$$D_k E(k) = \bigotimes_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^{k_i} H^{(*k_i)}(x_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{x_i=0} = \delta_{(x_1,\cdots,x_n)=0}.$$

2. *Quelle est la régularité de la solution fondamentale ainsi construite lorsqu'on prend $k_1 = \cdots = k_n = p+2$? Généraliser alors la conclusion de l'exercice 3 aux distributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.*

Comme $H*H$ est continue, $H^{(*p+2)}$ est de classe $\mathcal{C}^p$, donc $\tilde{E}(p+2) := E(p+2, \cdots, p+2)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}^n$.

De la même manière qu'à l'exercice 3, on obtient que, si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est d'ordre p, $u * \tilde{E}(p+2)$ est continue, et on a $D_{(p+2,\cdots,p+2)}(u * \tilde{E}(p+2)) = u$. La conclusion est que toute distribution d'ordre p et à support compact sur $\mathbb{R}^n$ est la dérivée à l'ordre $(p+2, \cdots, p+2)$ d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7

1. *Soient E_n la solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^n$, et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction plateau valant 1 au voisinage de 0. Montrer que $\Delta(\chi E_n) - \delta_0$ est un élément de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

D'après la formule de Leibniz, on a

$$\Delta(\chi E_n) = (\Delta\chi)E_n + 2\nabla\chi \cdot \nabla E_n + \chi(\Delta E_n).$$

D'un côté, on a $\Delta E_n = \delta_0$, donc $\chi \Delta E_n = \chi(0)\delta_0 = \delta_0$. Du reste, $E_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ (car le laplacien est hypoelliptique) et $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0, donc les deux autres termes sont nulles au voisinage de 0. Ainsi, $(\Delta\chi)E_n + 2\nabla\chi \cdot \nabla E_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, et cette quantité est exactement égale à $\Delta(\chi E_n) - \delta_0$.

2. *Montrer que $\partial_i(\chi E_n) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

On utilise à nouveau la formule de Leibniz pour écrire

$$\partial_{x_i}(\chi E_n) = (\partial_{x_i}\chi)E_n + \chi(\partial_{x_i} E_n).$$

Une nouvelle fois, on a $\partial_{x_i}\chi = 0$ au voisinage de 0, donc $(\partial_{x_i}\chi)E_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est à support compact, donc c'est une fonction L^1.

D'autre part, calculons $\partial_{x_i} E_n$. Soir $r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; on a $\partial_{x_i} r = \dfrac{x_i}{r}$.

- Cas $n = 2$: à la constante de normalisation près, on a $E_2(x) = \ln(r)$. Ainsi,

$$\partial_{x_i} E_2(x) = \frac{x_i}{r^2}.$$

- Cas $n \geq 3$: on a $E_n(x) = r^{2-n}$, donc

$$\partial_{x_i} E_n(x) = \frac{x_i}{r}(2-n)r^{1-n} = \frac{(2-n)x_i}{r^n}.$$

On étudie donc l'intégrabilité au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ de $x \mapsto \frac{x_i}{r^n}$. Considérons $A(\varepsilon) = B(0,1) \backslash B(0,\varepsilon)$ un anneau dans $\mathbb{R}^n$, et effectuons le changement de variables polaire dans

$$\int_{A(\varepsilon)} \frac{|x_i|}{|x|^n}\, dx = C \int_{\varepsilon}^{1} r^{1-n} r^{n-1}\, dr = C(1-\varepsilon),$$

où C est le résultat des intégrales en les angles. Il est alors clair que cette intégrale admet une limite lorsque $\varepsilon \to 0$, donc on a bien $\partial_{x_i} E_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Comme on prend ensuite le produit de $\partial_{x_i} E_n$ avec une fonction à support compact, $\chi(\partial_{x_i} E_n) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ce qui achève la question.

3. *Soit T une distribution telle que $\partial_{x_i} T \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout i. Montrer que $T \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Posons $\psi = \Delta(\chi E_n) - \delta_0$. Pour une distribution T, on a alors

$$T = T * \delta_0 = T * (\Delta(\chi E_n) - \psi) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} T * \partial_{x_i}(\chi E_n) - T * \psi.$$

Le premier terme est un élément de L^2 d'après l'inégalité de Young, vu que c'est la convolution d'une fonction L^2 ($\partial_{x_i} T$) et d'une fonction L^1 (question 2). Le second terme est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (proposition 3.5.5), donc le tout est bien L^2_{loc}.

Exercice 8

1. *Soient P et Q deux opérateurs différentiels hypoelliptiques. Montrer que $P \circ Q$ est également hypoelliptique.*

Comme P et Q sont hypoelliptiques, on a, pour tout $u \in \mathcal{D}'$,

$$\text{singsupp}((P \circ Q)u) = \text{singsupp}(P(Qu)) = \text{singsupp}(Qu) = \text{singsupp}(u).$$

Donc $P \circ Q$ est hypoelliptique.

2. (a) *Soit, sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$. Montrer que $\partial_{x_1} E$ et $\partial_{x_2} E$ sont des éléments de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.*

Fait dans l'exercice précédent.

(b) *Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ à support dans $B(0,R)$. Montrer que*

$$< \Delta E, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) \nabla E(x) \cdot \frac{x}{\varepsilon}\, d\sigma_\varepsilon(x) + \int_{\varepsilon<|x|<R} \Delta E(x) \varphi(x)\, dx,$$

où $d\sigma_\varepsilon$ est la mesure curviligne sur le cercle de rayon ε.

On a $< \Delta E, \varphi >= - < \partial_{x_1} E, \partial_{x_1} \varphi > - < \partial_{x_2} E, \partial_{x_2} \varphi >$. Comme les dérivées partielles de E sont des éléments de L^1_{loc}, on peut bien écrire

$$< \Delta E, \varphi >= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|x|<R} \nabla E(x) \cdot \nabla \varphi(x)\, dx,$$

avec $R > 0$ de sorte que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(0,R)$. On applique la formule de Stokes à cette intégrale, pour obtenir

$$\begin{aligned}
-\int_{\varepsilon<|x|<R} \nabla E(x)\cdot\nabla\varphi(x)\ dx \quad = \quad & -\int_{|x|=R} \varphi(x)\nabla E(x)\cdot n(x)\ d\sigma_R(x) \\
& -\int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\nabla E(x)\cdot n(x)\ d\sigma_\varepsilon(x) \\
& +\int_{\varepsilon<|x|<R} \Delta E(x)\varphi(x)\ dx,
\end{aligned}$$

où, dans les termes de bord, $n(x)$ désigne la normale extérieure à l'anneau $A(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon < |x| < R\}$. Le premier terme est nul, vu que $\varphi(x) = 0$ pour $|x| = R$. Dans le second terme, on remarque que la normale extérieure à $A(\varepsilon)$ sur le bord $\{|x| = \varepsilon\}$ est égale à $\frac{-x}{|x|} = \frac{-x}{\varepsilon}$. Ceci achève la question.

(c) *En déduire que E est solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^2$.*

Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, E est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on vérifie que $\Delta E(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Le dernier terme de l'égalité est donc nul. Reste à évaluer $\int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\nabla E(x)\cdot\frac{x}{\varepsilon}\ d\sigma_\varepsilon(x)$. On remarque que $\nabla E(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{x}{|x|^2}$, donc, sur l'ensemble $\{|x| = \varepsilon\}$,

$$\nabla E(x)\cdot\frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\frac{|x|^2}{|x|^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}.$$

Ainsi, $\int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\nabla E(x)\cdot\frac{x}{\varepsilon}\ d\sigma_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)\ d\sigma_\varepsilon(x)$. En changeant la variable en $y = \frac{x}{\varepsilon}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)\ \frac{d\sigma_\varepsilon(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\int_{|x|=1}\varphi(\varepsilon y)\ d\sigma_1(y).$$

Un très rapide argument de convergence dominée implique ensuite que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)\nabla E(x)\cdot\frac{x}{\varepsilon}\ d\sigma_\varepsilon(x) = \varphi(0).$$

On arrive donc à $\Delta E = \delta_0$; E est donc bien solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^2$.

3. *Calculer la composée des opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar z}$. En partant de la solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^2$, retrouver les solutions fondamentales des opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar z}$.*

On se rappelle que les opérateurs de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \ \text{ et } \ \partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Il est facile de trouver que $\partial_z\partial_{\bar z} = \frac{1}{4}\Delta$.

Ainsi, quand on écrit que E est solution fondamentale de Δ, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= \Delta E = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}E \\
&= \frac{1}{\pi}\partial_z(\partial_x + i\partial_y)\ln(\sqrt{x^2+y^2}) \\
&= \frac{1}{\pi}\partial_z\frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\partial_z\frac{z}{z\bar{z}} \\
\delta_0 &= \partial_z\frac{1}{\pi\bar{z}},
\end{aligned}$$

ce qui dit exactement que $z \mapsto \frac{1}{\pi\bar{z}}$ est une solution fondamentale de l'opérateur ∂_z.

En échangeant les rôles de ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ dans le processus précédent, on arrive au fait que $\frac{1}{\pi z}$ est solution fondamentale de l'opérateur $\partial_{\bar{z}}$.

III. Distributions tempérées et transformée de Fourier

Exercice 9 *Soirée quizz (questions indépendantes)*

1. *Montrer que si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est radiale, alors sa transformée de Fourier l'est également.*

Il s'agit de montrer que, si on a $\psi(Mx) = \psi(x)$ pour tout $M \in SO_n(\mathbb{R})$, alors il en va de même pour $\hat{\psi}$. Exprimons donc $\hat{\psi}(M\xi)$ pour M matrice de rotation: en changeant la variable $x = My$, sachant que $\det(M) = 1$, on a

$$\hat{\psi}(M\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\cdot M\xi}\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi My\cdot M\xi}\psi(My)\,dy.$$

Comme $M^*M = Id$ et ψ est radiale, on trouve bien

$$\hat{\psi}(M\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi y\cdot\xi}\psi(y)\,dy = \hat{\psi}(\xi).$$

2. *Justifier que la transformée de Fourier de la fonction $f : x \mapsto e^{-|x|}$ existe, et la calculer. Constater que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

La fonction f est à décroissance rapide, c'est donc un élément de $L^1(\mathbb{R})$, donc sa transformée de Fourier est un élément de $L^\infty(\mathbb{R})$. f s'identifie donc à une distribution tempérée, dont la dérivée seconde est, d'après la formule des sauts, égale à $f'' = f - 2\delta_0$. Donc $\hat{f}$ vérifie $(2i\pi\xi)^2\hat{f} = \hat{f} - 2$, ainsi

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

La transformée de Fourier de f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais à décroissance polynomiale en l'infini. Ce n'est donc pas un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; la fonction f ne l'était pas non plus car elle n'était pas $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

3. *En utilisant le résultat de l'exercice 4 de la feuille 3, montrer que toute distribution périodique est d'ordre fini et tempérée.*

D'après la question 2 (a) de l'exercice 4 du TD3, pour toute distribution périodique u de période T, il existe une distribution v à support compact, et donc d'ordre fini N, telle que $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{kT}v$. Il vient que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, il existe k_0 tel que $< u, \varphi >= \sum_{k=-k_0}^{+k_0} < \tau_{kT}v, \varphi >$, ainsi

$$\begin{aligned} | < u, \varphi > | &\leq \sum_{k=-k_0}^{+k_0} | < v, \tau_{-kT}\varphi > | \leq \sum_{k=-k_0}^{+k_0} C \sup_{j\leq N} \|\tau_{-kT}\varphi^{(j)}\|_\infty \\ &\leq C(\mathrm{supp}(\varphi)) \sup_{j\leq N} \|\varphi^{(j)}\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc u est bien d'ordre fini.

Pour montrer que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on utilise la décomposition en série de Fourier. Comme $e^{ip\omega x} \in L^\infty(\mathbb{R})$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, c'est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Il s'agit donc de montrer que la série $\sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p e^{ip\omega x}$, avec (c_p) une suite de coefficients à croissance au plus polynomiale, converge dans $\mathcal{S}'$. Pour cela, le même argument qu'à la question 1 de l'exercice 4 du TD3 fonctionne encore.

4. *Est-il vrai que $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$?*

Si $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, alors, pour tout $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on doit avoir $\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\, dx < +\infty$. Il suffit à présent de prendre $f(x) = e^x$ et $\psi(x) = e^{-\frac{x}{2}}\chi(x)$ avec χ $\mathcal{C}^\infty$, positive, à support dans $\mathbb{R}^+$ et valant 1 sur $[1, +\infty[$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)\, dx \geq \int_1^{+\infty} e^x e^{-x/2}\, dx = \int_1^{+\infty} e^{x/2}\, dx = +\infty.$$

Donc il n'est pas vrai que $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 10 *Calculs de transformées de Fourier*

1. *Dériver deux fois la distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, $u = e^{-|x|}$, pour trouver facilement sa transformée de Fourier.*

Fait dans l'exercice précédent.

2. *Déterminer similairement, sans grand calcul, la transformée de Fourier de $u = He^{-\lambda x}$, avec $\lambda > 0$. Peut-on utiliser le même stratagème lorsque $\lambda = 0$?*

Dérivons u une fois: par la formule de Leibniz, on a $u' = -\lambda u + \delta_0$. Comme $u \in L^\infty$, c'est bien une distribution tempérée, on peut donc écrire que $2i\pi\xi\hat{u} = -\lambda\hat{u} + 1$, ce qui permet d'aboutir rapidement à $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\lambda+2i\pi\xi}$.

En fixant $\lambda = 0$, on tomberait sur $\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2i\pi\xi}$ qui n'est même pas un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On doit donc s'y prendre autrement.

3. *Pour $\alpha \neq 0$, calculer la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $u_\varepsilon = \frac{1}{x+i\alpha\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon>0} 0$. En déduire la transformée de Fourier de la fonction de Heaviside.*

Comme $u_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on a, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\eta > 0$,

$$< u_\varepsilon, \psi >= \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(x)}{x + i\alpha\varepsilon}\, dx = \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\psi(x)}{x + i\alpha\varepsilon}\, dx + \int_{|x|>\eta} \frac{\psi(x)}{x + i\alpha\varepsilon}\, dx.$$

La seconde partie admet bien une limite lorsque $\varepsilon \to 0$: en appliquant le théorème de convergence dominée (vérification des hypothèses laissée au lecteur), on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\eta} \frac{\psi(x)}{x + i\alpha\varepsilon}\, dx = \int_{|x|>\eta} \frac{\psi(x)}{x}\, dx,$$

et on reconnaît que la limite lorsque η tend vers 0 de cette quantité est $< \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \psi >$.

Le premier terme peut se décomposer ainsi:

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\psi(x)}{x + i\alpha\varepsilon}\, dx = \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x + i\alpha\varepsilon}\, dx + \psi(0) \int_{-\eta}^{\eta} \frac{x - i\alpha\varepsilon}{x^2 + \alpha^2\varepsilon^2}\, dx,$$

où le premier terme n'est pas problématique, puisque pour $x \in [-\eta, \eta]$,

$$\left|\frac{\psi(x) - \psi(0)}{x + i\alpha\varepsilon}\right| \leq \frac{Cx}{x}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)),$$

donc l'intégrale est $\mathcal{O}(\eta+\varepsilon)$. Dans l'autre terme, où on a déjà multiplié par le conjugué de $x + i\alpha\varepsilon$ en haut et en bas, on a

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{x}{x^2 + \alpha^2\varepsilon^2}\, dx = 0 \quad \text{et} \quad -\int_{-\eta}^{\eta} \frac{i\alpha\varepsilon}{x^2 + \alpha^2\varepsilon^2}\, dx = -i \int_{-\eta}^{\eta} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\alpha\varepsilon}\right)^2} \frac{dx}{\alpha\varepsilon}.$$

On change la variable dans ce dernier, $y = \frac{x}{\alpha\varepsilon}$, et on intègre avant de faire tendre ε vers 0:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\psi(x)}{x + i\alpha\varepsilon}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} -2i\psi(0)\text{sgn}(\alpha) \arctan\left(\frac{\eta}{\alpha\varepsilon}\right) = -i\pi\psi(0),$$

le facteur $\text{sgn}(\alpha)$ étant dû à l'inversion de l'ordre des bornes de l'intégrale si $\alpha < 0$. Ainsi, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = -i\text{sgn}(\alpha)\pi\delta_0 + \text{vp}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Rappelons-nous maintenant de l'objectif de l'exercice: déterminer la transformée de Fourier de H. Par convergence dominée (là encore, laissée au lecteur), on a que $f_\lambda(x) = H(x)e^{-\lambda x} \overset{\lambda\to 0}{\rightharpoonup} H$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, donc $\hat{H}$ est la limite dans $\mathcal{S}'$ des transformées de Fourier de f_λ (autre petit exercice). Ainsi, en posant $\alpha = \frac{-1}{2\pi}$,

$$\hat{H}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\lambda\to 0} u_\lambda(\xi) = \frac{1}{2}\delta_{\xi=0} - \frac{i}{2\pi}\text{vp}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Exercice 11

Soit l'application linéaire:

$$T: \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)\ dx. \end{array}$$

1. (a) *Montrer que T est une distribution. Donner son ordre et son support.*

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ à support dans $B(0,R)$. Alors,

$$| < T, \varphi > | = \left| \int_{-R}^{R} \varphi(x,x)\ dx \right| \leq 2R\|\varphi\|_\infty.$$

Ceci montre que l'application linéaire T est une distribution d'ordre 0. Son support est égal à la diagonale $D = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$. En effet, si φ est à support dans $\mathbb{R}^2 \backslash D$, on a $\varphi(x,x) = 0$ pour tout x, donc $< T, \varphi >= 0$.

(b) *La distribution T peut-elle être représentée par une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$?*

Si T peut être représentée par une fonction L^1_{loc}, celle-ci doit être à support dans D. Or, cet ensemble est de mesure de Lebesgue nulle.

(c) *Calculer $\partial_x T + \partial_y T$.*

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ comme précédemmment. Alors,

$$< \partial_x T + \partial_y T, \varphi >= - < T, \partial_x \varphi + \partial_y \varphi >= - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x \varphi + \partial_y \varphi)(x,x)\ dx.$$

On reconnaît dans l'inégrale $(\partial_x \varphi + \partial_y \varphi)(x,x) = \frac{d}{dx}\Phi(x)$, avec $\Phi(x) = \varphi(x,x)$, et on a $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-R,R]$. Ainsi,

$$< \partial_x T + \partial_y T, \varphi >= \Phi(-R) - \Phi(R) = 0.$$

2. *Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.*

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$; alors $< T, \psi >$ existe car $\Psi(x) = \psi(x,x)$ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Il reste à montrer une inégalité de continuité dans $\mathcal{S}'$. Pour cela, multiplions par $\frac{1+x^2}{1+x^2}$ dans l'intégrale:

$$| < T, \psi > | \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)|\Psi(x)|\ dx \leq \pi(\|\psi\|_\infty + \|xy\psi\|_\infty).$$

(a) *Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'on peut écrire*

$$< \hat{T}, \psi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2} \hat{\psi}(x,x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\zeta^2} \psi\left(\xi, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi}\zeta - \xi\right)\ d\xi\ d\zeta.$$

Dans un premier temps, on remarque que l'on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} e^{-\varepsilon x^2} \hat{\psi}(x,x) = \hat{\psi}(x,x)$ pour tout x, et la majoration $|e^{-\varepsilon x^2}\hat{\psi}(x,x)| \leq |\Psi(x)|$, avec $\Psi(x) = \hat{\psi}(x,x)$ élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Donc le théorème de convergence dominée implique la première égalité.

Exprimons $\hat{\psi}$ dans l'intégrale:

$$I_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2} \hat{\psi}(x,x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon x^2} e^{-2i\pi x(\xi+\eta)} \psi(\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta\ dx.$$

En changeant la variable $z = \xi + \eta$, on arrive à

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi, z-\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2} e^{-2i\pi x z}\ dx \right)\ d\xi\ dz$$

(le tout étant une fonction L^1 sur $\mathbb{R}^3$, les intégrales sont intervertissables d'après le théorème de Fubini). A l'intérieur de la parenthèse, on reconnaît la transformée de Fourier d'une gaussienne. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2} e^{-2i\pi x z}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \exp\left(\frac{-(\pi z)^2}{\varepsilon} \right).$$

En faisant un nouveau changement de variables dans I_ε, $\zeta = \frac{\pi z}{\sqrt{\varepsilon}}$, on arrive à la deuxième égalité:

$$< \hat{T}, \psi > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\zeta^2} \psi\left(\xi, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi}\zeta - \xi \right)\ d\xi\ d\zeta.$$

(b) *En déduire l'expression de $\hat{T}$.*

Une nouvelle application du théorème de convergence dominée permet d'obtenir que

$$< \hat{T}, \psi > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\zeta^2} \psi(\xi, -\xi)\ d\xi\ d\zeta.$$

En effet, on a convergence ponctuelle de l'intégrande, et, comme $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$e^{-\zeta^2} \left| \psi\left(\xi, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi}\zeta - \xi \right) \right| \le \frac{Ce^{-\zeta^2}}{(1+\xi^2)\left(1 + \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi}\zeta - \xi\right)^2\right)} \le \frac{Ce^{-\zeta^2}}{1+\xi^2},$$

ce qui donne la majoration uniforme en ε par une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$.
Ainsi, comme $\int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta^2}\ d\zeta = \sqrt{\pi}$, on identifie la transformée de Fourier de T:

$$< \hat{T}, \psi > = \int_{\mathbb{R}} \psi(x, -x)\ dx.$$

UPMC, Master 1 Mathématiques, année 2014-2015
UE 4M046: Equations aux Dérivées Partielles

Corrigé TD 5

I. D'autres calculs de transformée de Fourier

Exercice 1

1. *Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer la transformée de Fourier de δ_a.*

Tout d'abord, δ_a est une distribution à support compact, donc tempérée. On écrit l'action de sa transformée de Fourier: pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$< \hat{\delta}_a, \psi >=< \delta_a, \hat{\psi} >= \hat{\psi}(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi a\xi}\psi(\xi)\ d\xi.$$

$\hat{\delta}_a$ s'identifie donc à la fonction L^1_{loc} $\xi \mapsto e^{-2i\pi a\xi}$.

2. *En déduire la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-A,A]}$, pour $A > 0$. Vérifier que cette transformée se prolonge en une fonction entière.*

Notons $f_A = \mathbf{1}_{[-A,A]}$. D'après la formule des sauts, on a $f'_A = \delta_{-A} - \delta_A$ au sens des distributions. Ainsi, $\mathcal{F}(f'_A)$ s'identifie à la fonction $\xi \mapsto e^{2i\pi A\xi} - e^{-2i\pi A\xi} = 2i\sin(2\pi A\xi)$. Or, $\mathcal{F}(f'_A)(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}(f_A)$, d'où

$$\mathcal{F}(f_A)(\xi) = \frac{\sin(2\pi A\xi)}{\pi\xi}.$$

Cette fonction est bien entière, puisque $\sin(2\pi A\xi) = \pi\xi g(\xi)$ avec g entière.

3. *Calculer la transformée de Fourier de*

$$f(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{]-1,1[}(x).$$

Pour calculer $\hat{f}$, on dérive deux fois pour se ramener à une combinaison de masses de Dirac. En effet, au sens des distributions, on a $f' = (1 - 2H)f_1$, où H est la fonction de Heaviside, f_1 est l'indicatrice avec la notation de la question précédente, et il n'y a pas de saut puisque $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. La fonction f' est constante par morceaux, d'où

$$f''(x) = \delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1.$$

On déduit que $\mathcal{F}(f'') = e^{2i\pi\xi} + e^{-2i\pi\xi} - 2 = 2(\cos(2\pi\xi) - 1)$, et donc que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1 - \cos(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2} = \frac{\sin^2(\pi\xi)}{\pi^2\xi^2}.$$

À nouveau, on remarque que $\hat{f}$ est analytique, conformément au théorème 4.3.1 du poly RA.

4. *Calculer $\mathcal{F}(u)$ pour u distribution définie par*

$$< u, \varphi >= \int_{\mathbb{S}^2} \varphi(\omega) d\sigma(\omega).$$

On laisse vérifier que $\mathrm{supp}(u) = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Ainsi, u est une distribution à support compact, donc $\hat{u}$ est une fonction analytique donnée par

$$\hat{u}(\xi) =< u(x), e^{-2i\pi\xi\cdot x} > .$$

De plus, on montre que u est une distribution radiale, c'est-à-dire qu'elle est invariante par composition avec une rotation au sens du tiré en arrière affine du paragraphe 3.4.2 du poly. Ainsi, $\hat{u}$ est une fonction radiale (autre exercice).

Commençons par exprimer $\hat{u}(\xi)$. On a

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-2i\pi\xi\cdot\omega}\ d\sigma(\omega),$$

et on peut exprimer cette intégrale en coordonnées sphériques comme suit:

$$\hat{u}(\xi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-2i\pi\xi\cdot\omega(\theta,\varphi)} \sin(\varphi)\ d\varphi\ d\theta,$$

avec $\omega(\theta, \varphi) = (\cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\varphi))$.

Comme $\hat{u}$ est radiale, il suffit de regarder $\hat{u}(0, 0, z)$. On a alors

$$\hat{u}(0, 0, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-2i\pi z\cos(\varphi)} \sin(\varphi)\ d\varphi\ d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} e^{-2i\pi zu}\ du$$

après changement de variable $u = \cos(\varphi)$. On arrive alors rapidement à

$$\hat{u}(\xi) = 2\frac{\sin(2\pi|\xi|)}{|\xi|} = 4\pi\frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}.$$

En particulier, on a $\hat{u}(0) = \int_{\mathbb{S}^2} d\sigma(\omega) = 4\pi$, la surface de la sphère unité.

Exercice 2

1. *Calculer $\delta_0'' * |x|$.*

Il suffit de redistribuer les dérivées:

$$\delta_0'' * |x| = (\delta_0 * |x|)'' = |x|'' = 2\delta_0.$$

2. *En déduire que $\mathcal{F}|x|$ est de la forme*

$$a\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{+^2}\right) c\delta_0',$$

où on explicitera la constante a.

La fonction $f : x \mapsto |x|$ étant à croissance polynomiale, on l'associe sans problème à une distribution tempérée. Prenons la transformée de ci-dessus: on obtient l'équation suivante pour $\hat{f}$ au sens des distributions,

$$-4\pi^2\xi^2\hat{f} = 2.$$

En combinant les résultats des exercices 3.3.(b) et 8.2 de la feuille 3, on a que

$$\hat{f}(\xi) = \frac{-1}{2\pi^2}\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{\xi^2}\right) + c\delta_0' + c_0\delta_0. \tag{1}$$

Comme f est homogène de degré 1, sa dérivée seconde, $2\delta_0$, est homogène de degré -1, δ_0' est homogène de degré -2, tout comme $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Enfin, d'après le lemme 4.1.9 du poly, sa transformée de Fourier est homogène de degré $-1-1=-2$, ce qui implique, dans l'égalité (1), que $c_0 = 0$.

3. *Rappeler* $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)'$. *En déduire* $\mathcal{F}\left(\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ *et la constante* c.

On a vu sur la feuille 3 que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi,

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)(\xi) = -2i\pi\xi\mathcal{F}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)(\xi) = -2i\pi\xi(-i\pi\mathrm{sgn}(\xi)) = -2\pi^2|\xi|.$$

On applique la transformée de Fourier à (1), et on obtient donc

$$\mathcal{F}(\hat{f})(z) = |\check{z}| = |z| = |z| + 2i\pi cz,$$

donc on conclut que $c = 0$.

Exercice 3

Voir le lemme 4.1.11 du poly RA.

J'attire cependant l'attention sur la partie 2.(c) qui est très peu développée dans la preuve, mais qui est en fait assez subtile. La fonction u_α étant L^1_{loc}, on ne peut pas utiliser la formule intégrale pour calculer sa transformée de Fourier. En revanche, on peut écrire, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$< \hat{u}_\alpha, \psi >=< u_\alpha, \hat{\psi} >= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\cdot\xi}u_\alpha(x)\psi(\xi)\, d\xi\, dx,$$

où l'ordre d'intégration est important, puisque $u_\alpha(x)\psi(\xi) \notin L^1(\mathbb{R}^2)$! Pour reconnaître l'action de $\hat{u}_\alpha$ comme celle d'une fonction L^1_{loc}, on doit faire apparaître $u_\alpha(x)\psi(\xi)$ comme une fonction L^1, et pour cela, on tronque d'une part au voisinage de 0 avec χ, et d'autre part on multiplie $(1-\chi(x))u_\alpha(x)$ par $|\xi|^2N$. De la même façon qu'une multiplication par $2i\pi\xi$ correspond à une dérivée dans l'espace physique, cette multiplication correspond à l'application de *l'opérateur pseudo-différentiel* $|D_x|^{2N}$, qui correspond en fait à l'opérateur différentiel $(\frac{-1}{4\pi}\Delta)^N$. L'entier N est alors choisi de sorte que $(1-\chi)\Delta^N u_\alpha$ soit intégrable à l'infini (pour cela il faut $2N > \alpha$), mais aussi pour que sa dérivée soit intégrable pour pouvoir appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale - il faut donc prendre $2N > \alpha + 1$. À présent, la fonction

$$(x, \xi) \mapsto e^{-2i\pi\xi\cdot x} \left[\chi(x)u_\alpha(x)\psi(\xi) + \frac{1}{|\xi|^{-2N}}|D_x|^{2N}((1-\chi(x))u_\alpha(x))\right]\psi(\xi)$$

est une fonction L^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash B(0, \varepsilon)$ pour tout ε, donc, en prenant $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathrm{supp}(\psi) \subset \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, et seulement à ce moment-là, on peut intervertir les intégrales pour identifier la distribution $\hat{u}_\alpha$ avec la fonction proposée sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

Ensuite, on combine les questions précédentes pour obtenir que $\hat{u}^\alpha(\xi) = c_\alpha|\xi|^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$: sur ce domaine, $f_\alpha(\xi) = |\xi|^\alpha\hat{u}^\alpha(\xi)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, radiale et homogène de degré 0, donc constante (le caractère radial nous ramène au cas 1D, puis utiliser la relation d'Euler).

Exercice 4

1. *Quelles sont les transformées de Fourier de* $e^{\pm ix}$, $\cos(x)$, $\sin(x)$*?*

On a vu précédemment que $\hat{\delta}_a(\xi) = e^{-2i\pi a\xi}$. De plus, on a $\hat{\hat{\delta}}_a = \check{\delta}_a = \delta_{-a}$, donc

$$\mathcal{F}(e^{\pm ix}) = \delta_{\pm\frac{1}{2\pi}}.$$

On obtient alors les transformées de Fourier de cos et sin par linéarité:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\cos(x)) &= \frac{1}{2}[\mathcal{F}(e^{ix}) + \mathcal{F}(e^{-ix})] = \frac{1}{2}[\delta_{\frac{1}{2\pi}} + \delta_{\frac{-1}{2\pi}}], \\ \text{et} \quad \mathcal{F}(\sin(x)) &= \frac{1}{2i}[\mathcal{F}(e^{ix}) - \mathcal{F}(e^{-ix})] = \frac{1}{2i}[\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{\frac{-1}{2\pi}}]. \end{aligned}$$

2. *Calculer la transformée de Fourier de* $f(x) = \frac{2\sin(x) - 2x\cos(x)}{x^3}$.

Montrons tout d'abord que $f \in L^1(\mathbb{R})$, ce qui justifiera que sa transformée de Fourier existe. L'intégrabilité à l'infini vient du fait que $f(|x|) = \mathcal{O}(x^{-2})$, mais il y a aussi, *a priori*, une singularité en 0. Examinons le numérateur: on a

$$\sin(x) = x + x^3g(x) \quad \text{et} \quad x\cos(x) = x + x^3h(x)$$

avec g et h entières, donc $f(x) = 2g(x) - 2h(x)$ au voisinage de 0 - la singularité est effaçable, et f est analytique sur $\mathbb{R}$.

On a $x^3f(x) = 2\sin(x) - 2x\cos(x)$, ce qui, en passant à la transformée de Fourier, se traduit effectivement en une équation différentielle:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^3f)(\xi) &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^3 \hat{f}^{(3)}(\xi) = 2\mathcal{F}(\sin)(\xi) + \frac{2}{2i\pi}\mathcal{F}(\cos)'(\xi), \\ \text{soit} \quad \hat{f}^{(3)}(\xi) &= 8\pi^3[\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \delta_{\frac{-1}{2\pi}}] + 4\pi^2[\delta'_{\frac{1}{2\pi}} + \delta'_{\frac{-1}{2\pi}}]. \end{aligned}$$

Intégrons cette expression. Une primitive du premier terme s'obtient en l'interprétant comme une conséquence de la formule des sauts: $-\mathbf{1}'_{[-A,A]} = \delta_A - \delta_{-A}$. Le second terme s'intègre sans difficulté. Au final, on a

$$\hat{f}''(\xi) = -8\pi^3\mathbf{1}_{[\frac{-1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\xi) + 4\pi^2[\delta_{\frac{1}{2\pi}} + \delta_{\frac{-1}{2\pi}}] + c_2.$$

A nouveau, on peut intégrer ceci avec une interprétation de la formule des sauts: une primitive de $\hat{f}''$ au sens des distributions est une fonction à trois morceaux affines (deux constantes et une avec une pente $-8\pi^3$) avec des sauts d'amplitude $4\pi^2$. On remarque que $-8\pi^3(\frac{-1}{2\pi}) - 4\pi^2 = -8\pi^3(\frac{1}{2\pi}) + 4\pi^2 = 0$, d'où

$$\hat{f}'(\xi) = -8\pi^3 \xi \mathbf{1}_{[\frac{-1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi) + c_2\xi + c_1.$$

L'intégration de cette expression est directe: on obtient que

$$\hat{f}(\xi) = -4\pi^3\left(\xi^2 - \frac{1}{4\pi^2}\right)\mathbf{1}_{[\frac{-1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi) + \frac{c_2}{2}\xi^2 + c_1\xi + c_0.$$

On doit déterminer les c_j. Pour cela, on se rappelle du lemme de Riemann-Lebesgue: comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on doit avoir $\hat{f}$ continue et $\hat{f}(\xi) \overset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc les c_j sont tous nuls.

Exercice 5

1. *Montrer que* $T : z \mapsto \frac{1}{z}$ *est une distribution tempérée sur* $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit d'une fonction de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ qui bornée à l'infini (autrement dit, somme d'une fonction L^1 à support compact et d'une fonction L^∞, donc somme de deux distributions tempérées). Montrer que T est L^1_{loc} est laissé au lecteur.

2. *Calculer sa transformée de Fourier.*

La distribution T est, à une constante $\frac{1}{\pi}$ près, une solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Si (ξ, ζ) est la variable de Fourier correspondant à (x, y), notons $\eta = \xi + i\zeta$. On a alors, comme $\frac{1}{\pi}\partial_{\bar{z}}T = \delta_0$, on a $(D_x + iD_y)T = -i\delta_0$, soit $\eta\hat{T} = -i$. Comme $\eta \mapsto \frac{1}{\eta}$ est un élément de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$, on a

$$\hat{T}(\eta) = \frac{-i}{\eta} + c\delta_0.$$

T étant homogène de degré -1, on trouve que $\hat{T}$ doit l'être également. La masse de Dirac étant homogène de degré -2 en dimension 2, on doit avoir $c = 0$.

Exercice 6

1. *Montrer que l'application* $\lambda \mapsto [x \mapsto e^{\lambda\frac{|x|^2}{2}}]$ *est continue de* $\{\mathrm{Re}\,(\lambda) \leq 0\}$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *holomorphe sur* $\{\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0\}$.

La continuité de $\Phi : \lambda \mapsto [f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda\frac{|x|^2}{2}}]$ s'obtient en montrant que, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction

$$\lambda \mapsto < f_\lambda, \psi > = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\frac{|x|^2}{2}}\psi(x)\, dx$$

est continue. Comme $\mathrm{Re}\,(\lambda) \leq 0$, on a $|f_\lambda(x)\psi(x)| \leq |\psi(x)|$, avec $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, et l'application $\lambda \mapsto f_\lambda(x)\psi(x)$ est continue, donc le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique, et Φ est donc continue de $\{\mathrm{Re}\,(\lambda) \leq 0\}$ à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Le même argument permet de montrer que Φ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0\}$, puisque $\lambda \mapsto f_\lambda(x)\psi(x)$ l'est, et qu'il suffit d'une domination uniforme et intégrable de $|f_\lambda \psi|$ pour conclure (*a contrario* du théorème de dérivation, qui nécessite le contrôle uniforme de la dérivée), ainsi $\partial_{\bar\lambda} f_\lambda = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Remarquons que, pour $\mathrm{Re}\,(\lambda) > 0$, $\Phi(\lambda)$ n'est pas un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. *En déduire, par prolongement analytique, la transformée de Fourier de* $[x \mapsto e^{it\frac{|x|^2}{2}}]$ *pour* $t \in \mathbb{R}$.

On va partir de la transformée de Fourier de f_λ. On voit rapidement qu'il suffit de traiter le cas $n = 1$, puisque, pour $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$, $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\lambda\frac{|x|^2}{2}} e^{-2i\pi\xi\cdot x}\, dx = \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda\frac{x_k^2}{2}} e^{-2i\pi\xi_k x_k}\, dx_k.$$

Calculons donc, pour $\eta \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_\lambda(\eta)$: en faisant apparaître $y^2 - 2y\frac{2i\pi\eta}{\lambda}$ comme le début d'un carré, on a

$$\hat{f}_\lambda(\eta) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda\frac{y^2}{2}} e^{-2i\pi\eta y}\, dy = e^{\frac{2\pi^2}{\lambda}\eta^2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\lambda}{2}\left(y-\frac{2i\pi\eta}{\lambda}\right)^2}\, dy.$$

On est donc ramené à calculer l'intégrale d'une gaussienne à paramètres complexes, à savoir $I(z,m) = \int_{\mathbb{R}} e^{z(y-m)^2}\, dy$, avec $\mathrm{Re}\,(z) < 0$ et $m \in \mathbb{C}$. Remarquons en premier lieu que la translation n'a aucun effet sur la valeur de l'intégrale. En effet, la fonction $m \mapsto I(z,m)$ est dérivable par rapport à m, et

$$\partial_m I(z,m) = \int_{\mathbb{R}} -2z(y-m)e^{z(y-m)^2}\, dy = -\int_{\mathbb{R}} \partial_y\left(e^{z(y-m)^2}\right) dy = 0,$$

d'où on est ramené à calculer $I(z,0) = \int_{\mathbb{R}} e^{zy^2}\, dy$.

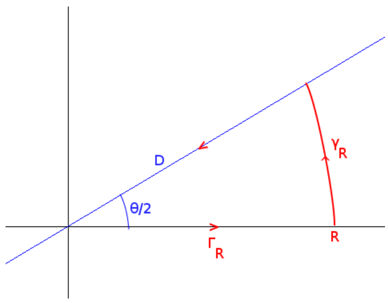
Comme $\mathrm{Re}\,(z) < 0$, on écrit $\frac{z}{\pi} = -re^{i\theta}$ avec $\theta \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on définit une racine carrée de $\frac{-z}{\pi}$ par

$$\left(\frac{-z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

et on effectue le changement de variable $s = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}y$, ce qui transforme la droite réelle en la droite D passant par 0 et faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ par rapport à l'horizontale. On a alors

$$I(z,0) = \int_D e^{-\pi s^2} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\theta}{2}}\, ds.$$

La fonction $s \mapsto e^{-\pi s^2}$ est entière, donc son intégrale sur le contour Γ dessiné ci-contre est nulle. En vérifiant que l'intégrale sur l'arc de cercle γ_R tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini, on obtiendra que



$$I(z,0) = \left(\frac{-z}{\pi}\right)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2}\, ds = \left(\frac{-z}{\pi}\right)^{-1/2}.$$

Prouvons-le: on paramétrise γ_R pour obtenir

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} e^{-\pi s^2}\, ds\right| &= \left|\int_0^{\frac{\theta}{2}} e^{-\pi R^2 e^{2i\zeta}} Rie^{i\zeta}\, d\zeta\right| \leq \int_0^{\frac{|\theta|}{2}} |e^{-\pi R^2\cos(2\zeta)} R|\, d\zeta \\ &\leq \frac{|\theta|}{2} Re^{-\pi R^2 \cos(\theta)} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

car $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

Recollons les morceaux pour finir le calcul de la transformée de Fourier de $e^{\lambda\frac{|x|^2}{2}}$. On a obtenu, pour $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}_\lambda(\eta) = \left(\frac{-\lambda}{2\pi}\right)^{-1/2} e^{\frac{2\pi^2}{\lambda}\eta^2},$$

d'où, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \left(\frac{-\lambda}{2\pi}\right)^{-n/2} e^{\frac{2\pi^2}{\lambda}|\xi|^2}.$$

La fonction $\lambda \mapsto \hat{f}_\lambda$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ (se cache sous le choix de la racine carrée de $-\lambda$ la détermination principale du logarithme complexe), et on a, lorsque $\lambda \to it$, avec $t \neq 0$, et en posant $\theta = \arg(-\lambda) \to \pm\frac{\pi}{2}$, d'où

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{n/2} e^{\frac{-in\theta}{2}} \exp\left(\frac{-2\pi^2}{|\lambda|}e^{-i\theta}|\xi|^2\right) \overset{\lambda\to it}{\longrightarrow} \left(\frac{2\pi}{|t|}\right)^{n/2} e^{\mp\frac{in\pi}{4}} e^{\frac{\pm 2i\pi^2}{|t|}|\xi|^2}.$$

Exercice 7 *Théorème de Paley-Wiener-Schwartz*

1. *Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (on écrira $T(x)$ pour signaler qu'elle opère sur des fonctions de la variable x) et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\hat{T}(z) :=< T(x), e^{2i\pi xz} >$ est un nombre complexe bien défini.*

Comme $x \mapsto e^{izx}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\hat{T}(z)$ est simplement le crochet de dualité $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}$.

2. *Montrer qu'il existe $A > 0$, $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait, pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$|\hat{T}(z)| \leq C(1 + |z|)^N e^{A|\mathrm{Im}\,(z)|}.$$

La distribution T étant à support compact, elle est d'ordre fini, ainsi il existe C et N tels que

$$|\hat{T}(z)| = |< T(x), e^{izx} >| \leq C \sup_{0\leq k\leq N} \|\partial_x^k e^{izx}\|_{L^\infty(\mathrm{supp}(T))}.$$

Or, $\partial_x^k e^{izx} = (iz)^k e^{izx}$, d'où le sup à droite est majoré par $\|e^{izx}\|_{L^\infty(\mathrm{supp}(T))}$ si $|z| \leq 1$, ou par $|z|^N \|e^{izx}\|_{L^\infty(\mathrm{supp}(T))}$ sinon. Enfin, sur le support de T, qui est supposé compact, donc inclus dans $[-A, A]$ pour un certain A, on a $|e^{izx}| \leq e^{A|\mathrm{Im}\,(z)|}$, ce qui achève la question.

3. *Notons $u_n =< T(x), x^n >$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire*

$$\hat{T}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{(iz)^n}{n!}.$$

Montrer que la convergence de la série est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Pour tout z, $x \mapsto e^{izx}$ est analytique sur $\mathbb{R}$: $e^{izx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(izx)^n}{n!}$, et la convergence est uniforme sur le support de T. Ainsi, on peut écrire

$$\hat{T}(z) =< T(x), \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} x^n >= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} < T, x^n >,$$

l'intervertion limite-crochet se faisant grâce à la convergence uniforme.

De la même façon qu'à la question 2, on remarque que $| < T, x^n > | \leq \frac{n!}{(n-N)!}(1+A)^n$ pour n grand. En prenant $z \in B(0, R)$, on trouve que

$$\left| u_n \frac{(iz)^n}{n!} \right| \leq \frac{(1+A)^n (1+R)^n}{(n-N)!}$$

qui est le terme général d'une série convergente. La convergence de la série entière en z est donc uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$, et $z \mapsto \hat{T}(z)$ est une fonction entière.

4. *Calculer les dérivées successives de l'application $\hat{T} : z \in \mathbb{R} \mapsto \hat{T}(z)$ en zéro, et en déduire que $\hat{T} \equiv 0 \Rightarrow T = 0$.*

Comme $\hat{T}$ est analytique, les dérivées successives se lisent sur le développement en série de Taylor. On a ainsi $\hat{T}^{(k)}(0) = u_k i^k$. Si $\hat{T} \equiv 0$, c'est que $u_k = 0$ pour tout k, soit $< T, x^k >= 0$ pour tout k. Comme les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}^N(\mathrm{supp}(T))$, on a que $< T, \varphi >= 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, dont $T = 0$.

5. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une distribution $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ telle que $< S, x^n >= \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer qu'elle est unique.*

$S = \delta_\lambda$ convient. L'unicité découle de la question précédente: si T est une autre distribution satisfaisant $< T, x^n >= \lambda^n$, alors leurs transformées de Fourier sont analytiques, et possèdent le même développement en série de Taylor en 0. On a alors $\widehat{T - S} \equiv 0$, donc $T - S = 0$.

6. *Montrer qu'il n'existe pas de distribution répondant aux mêmes spécifications lorsque $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.*

Une telle distribution serait forcément égale à $S = \delta_\lambda$ en tant qu'élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$. Le souci, c'est que δ_λ n'est pas une distribution sur $\mathbb{R}$. Si le contraire était vrai, on aurait, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$, un contrôle de $|\varphi(\lambda)|$ par une norme $\mathcal{C}^N$ de $\varphi|_{\mathbb{R}}$. En choisissant φ telle que $\varphi(\lambda) = 1$ et $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(\lambda, |\mathrm{Im}\,(\lambda)|)$, on a $< S, \varphi >\neq 0$ et $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^N(\mathbb{R})} = 0$.

II. Résolutions d'EDP

Exercice 8

1. *Expliciter une solution fondamentale de l'opérateur*

$$\partial_x^4 - \partial_x^2 + 1.$$

On va chercher une solution fondamentale E de l'opérateur $A = \partial_x^4 - \partial_x^2 + 1$ par transformée de Fourier. En effet, si $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on aura

$$\widehat{AE}(\xi) = 1 \Leftrightarrow ((2i\pi\xi)^4 - (2i\pi\xi)^2 + 1)\hat{E}(\xi) = 1 \Leftrightarrow \hat{E}(\xi) = \frac{1}{(2\pi\xi)^4 + (2\pi\xi)^2 + 1}.$$

On trouve bien que $\hat{E}(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, donc une solution fondamentale de A est donnée par transformée de Fourier inverse.

Décomposons en éléments simples la fraction $\frac{1}{Z^4+Z^2+1}$, avec $Z = 2\pi\xi$. On remarque que $X = Z^2$ satisfait X^2+X+1, donc les racines de Z^4+Z^2+1 sont les quatre racines sixièmes non réelles de l'unité: ce sont les $z_k = e^{ik\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathcal{K} := \{1, 2, -1, -2\}$. Il existe donc des constantes $(c_k)_{k\in\mathcal{K}}$ (qu'on ne calcule pas) qui permettent d'écrire

$$\hat{E}(\xi) = \sum_{k\in\mathcal{K}} \frac{c_k}{2\pi\xi - z_k}.$$

On est ramené à calculer la transformée de Fourier inverse de $f_z(\xi) = \frac{1}{2\pi\xi - z}$, avec $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, qui est bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

En utilisant le fait que $(2\pi\xi - z)f_z = 1$, on peut trouver une équation différentielle sur $\hat{f}_z$. En effet, $\widehat{2\pi\xi f_z} = -i\partial_x \hat{f}_z$, d'où on a

$$\mathcal{F}((2\pi\xi - z)f_z)(x) = (-i\partial_x - z)\hat{f}_z(x) = \delta_0 \quad , \text{ soit } \quad (\partial_x - iz)\hat{f}_z(x) = i\delta_0.$$

Posons $g(x) = e^{-izx}\hat{f}_z(x)$: on a que $\partial_x g = e^{-izx}(\partial_x - iz)\hat{f}_z$, d'où $\partial_x g = ie^{-izx}\delta_0 = i\delta_0$ au sens des distributions, d'où $g(x) = iH(x) + b$. On arrive à $\hat{f}_z(x) = e^{izx}(iH(x) + b)$. La constante b peut être uniquement déterminée en fonction de z en considérant la propriété de symétrie de f_z (laissé).

On conclut qu'il existe des constantes $(c_k)_{k\in\mathcal{K}}$ et $(b_k)_{k\in\mathcal{K}}$ telles que

$$E(x) = \mathcal{F}(\hat{E})(-x) = \sum_{k\in\mathcal{K}} c_k e^{-iz_k x}(iH(-x) + b_k).$$

2. *Trouver une solution fondamentale de l'opérateur*

$$\partial_x^4 - \partial_y^2 + 1.$$

Revenir à l'espace physique sera plus que compliqué (voir aussi l'exercice 10), mais on peut commencer le calcul. En effet, une solution fondamentale dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ de l'opérateur $\partial_x^4 - \partial_y^2 + 1$ satisfait

$$\hat{E}(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi\xi)^4 + (2\pi\eta)^2 + 1}.$$

Cette fonction est dans $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, et on peut ainsi écrire que

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi(\xi x+\eta y)} \frac{1}{(2\pi\xi)^4 + (2\pi\eta)^2 + 1}\, d\xi\, d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\alpha x+\beta y)} \frac{1}{\alpha^4 + \beta^2 + 1}\, d\alpha\, d\beta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\beta y} \frac{1}{\beta^2 + (\sqrt{\alpha^4+1})^2}\, d\beta \right) d\alpha. \end{aligned}$$

À l'intérieur de la parenthèse, on reconnaît la transformée de Fourier inverse d'une fonction de type densité de loi de Cauchy. En remarquant que $\mathcal{F}(e^{-a|y|})(\beta) = \frac{2a}{\beta^2+a^2}$ (exercice), on trouve que

$$E(x,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x} \frac{\exp\left(-\sqrt{1+\alpha^4}\,\left|\frac{y}{2\pi}\right|\right)}{2\sqrt{1+\alpha^4}}\, d\alpha = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\exp\left(-\sqrt{1+\alpha^4}\,\left|\frac{y}{2\pi}\right|\right)}{2\sqrt{1+\alpha^4}} \right)\left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

Exercice 9

1. *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une solution non nulle de l'équation $\Delta u = \lambda u$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}^-$, et que u se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}^d$.*

Prenons la transformée de Fourier de l'équation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: on trouve

$$-4\pi^2|\xi|^2\hat{u} = \lambda\hat{u}. \tag{2}$$

La distribution $\hat{u}$ vérifie donc $(-4\pi^2|\xi|^2 - \lambda)\hat{u} = 0$. Comme $u \neq 0$, le support de $\hat{u}$ doit être non trivial, ce qui n'est possible que si $-4\pi^2|\xi|^2 - \lambda$ peut s'annuler. Ainsi, on doit avoir $\lambda \leq 0$, et (2) implique que le support de $\hat{u}$ est réduit à $S(0, \frac{\sqrt{-\lambda}}{2\pi})$, ainsi, $\hat{u}$ étant à support compact, u est une fonction entière.

2. *Montrer que si $\lambda = 0$, alors u est un polynôme.*

Si $\lambda = 0$, alors le support de $\hat{u}$ est réduit à $\{0\}$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et des constantes $(c_k)_{k\in\{0,\cdots,N\}^d}$ tels que

$$\hat{u} = \sum_{|k|\leq N} c_k \partial_x^k \delta_0 \Rightarrow u(x) = \sum_{|k|\leq N} c_k (-2i\pi)^{|k|} x^k.$$

Exercice 10 *Opérateur de Klein-Gordon*

1. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ le problème de Cauchy suivant:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\Box + \lambda)u &=& 0 \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} &=& (u_0, u_1) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \end{array} \right.$$

où on rappelle que $\Box$ est l'opérateur de d'Alembert, $\Box = c^{-2}\partial_{tt}^2 - \Delta$.

Résolvons avec la transformée de Fourier en x: on arrive à

$$\partial_t^2 \hat{u} = -c^2(|\xi|^2 + \lambda)\hat{u},$$

que l'on résout avec les données initiales $\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_0$ et $\partial_t \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}_1$.

Si $\lambda \geq 0$, on a $-c^2(|\xi|^2 + \lambda) \leq 0$ pour tout ξ, donc

$$\hat{u}(t,\xi) = \cos(ct\sqrt{|\xi|^2 + \lambda})\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(ct\sqrt{|\xi|^2 + \lambda})}{c\sqrt{|\xi|^2 + \lambda}}\hat{u}_1(\xi). \tag{3}$$

Ensuite, on ne peut pas facilement retrouver une formule pour $u(t,x)$; si on connaît bien les transformées de Fourier inverses de cos et sinc (exercices précédents), on ne peut pas les utiliser car la variable n'est pas ξ mais $\sqrt{\xi^2 + \lambda}$ - pensez que si on avait affaire à des fonctions L^1, le changement de variable serait non trivial.

Si $\lambda < 0$, $-c^2(|\xi|^2 + \lambda)$ change de signe en $|\xi| = \sqrt{-\lambda}$. Pour $|\xi| \geq \sqrt{-\lambda}$, la formule (3) reste valide, mais pour $|\xi| < \sqrt{-\lambda}$, on a

$$\hat{u}(t,\xi) = \cosh(ct\sqrt{-\lambda - |\xi|^2})\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sinh(ct\sqrt{-\lambda - |\xi|^2})}{c\sqrt{-\lambda - |\xi|^2}}\hat{u}_1(\xi).$$

2. *Lorsque $\lambda > 0$, montrer que si u est une solution de l'équation de Klein-Gordon ci-dessus en dimension d, alors*

$$v : (t, x_1, \cdots, x_d, y) \mapsto e^{i\sqrt{\lambda}y} u(t, x_1, \cdots, x_d)$$

résout l'équation des ondes en dimension $d + 1$.

Pour $\lambda > 0$, montrer que v résout l'équation des ondes $\partial_t^2 v - c^2 \Delta_x v - c^2 \partial_y^2 v = 0$ est un simple calcul.

UPMC, Master 1 Mathématiques, année 2014-2015
UE 4M046: Equations aux Dérivées Partielles

Corrigé TD 6

I. Fonctions harmoniques

Exercice 1 *Propriétés du laplacien (questions indépendantes)*

1. *Montrer que les translations, homothéties et rotations préservent les fonctions harmoniques.*

Pour les translations et les rotations, montrons que le caractère harmonique d'une fonction est préservée par isométrie affine. Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et évaluons $\Delta(f(Ax + x_0))$ avec $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Par dérivation composée, on a que la différentielle de $f(Ax + x_0)$ vérifie

$$D_x(f(Ax + x_0)) = D_{Ax+x_0} f \circ D_x(Ax + x_0) = (Df)(Ax + x_0)A,$$

donc $\nabla(f(Ax + x_0)) = A^t(\nabla f)(Ax + x_0)$. En prenant la divergence de cette égalité et en écrivant $A = (c_1 \cdots c_n)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \Delta(f(Ax + x_0)) &= \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(A^t \nabla f(Ax + x_0))_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \partial_{x_j}(\nabla f(Ax + x_0)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} c_j \cdot c_i (\partial_{x_i,x_j} f)(Ax + x_0) = \sum_{i,j}^{n} \delta_{i,j} (\partial_{x_i,x_j} f)(Ax + x_0), \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Ainsi, on a $\Delta(f(Ax + x_0)) = (\Delta f)(Ax + x_0)$, et si f est harmonique, on a $\Delta f = 0$, donc $\Delta(f(Ax + x_0)) = 0$ également.

La même conclusion s'impose pour les homothéties, puisque $\Delta(f(\lambda x)) = \lambda^2(\Delta f)(\lambda x)$.

On ne peut pas en revanche exprimer $\Delta(f \circ A)$ facilement avec A générale; il faut de l'isotropie, à savoir que la dilatation induite par A est la même dans toutes les directions (d'où les bonnes propriétés pour les isométries et les homothéties). Pour s'en convaincre, calculer $\Delta(f \circ A)$ avec $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$.

2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que ΔT est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. En se servant de l'hypoellipticité de Δ sur $\mathbb{R}^n$, montrer que $T \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ une fonction plateau, valant 1 sur $K \subset \Omega$ compact. On prolonge $T \in \mathcal{D}'(\mathring{K})$ en une distribution sur $\mathbb{R}^n$ en considérant χT. On a

$$\Delta(\chi T) = T\Delta\chi + 2\nabla T \cdot \nabla\chi + \chi\Delta T,$$

donc le support singulier de $\Delta(\chi T)$ est inclus dans $\Omega\backslash K$, vu que $\Delta(\chi T) = \chi\Delta T$ sur K. Le laplacien sur $\mathbb{R}^n$ étant hypoelliptique, le support singulier de χT est également inclus dans $\Omega\backslash K$, donc $\chi T \in \mathcal{C}^\infty(K)$, avec $\chi T = T$ sur K. Ainsi, $T \in \mathcal{C}^\infty(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$, et est donc un élément de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

3. *Montrer qu'une fonction radiale et harmonique sur $B(0,R)$ est constante.*

On peut montrer ceci de deux manières:

- avec un changement de coordonnées. Le laplacien d'une fonction radiale s'écrit en coordonnées sphériques

$$\Delta f(r) = \partial_r^2 f + \frac{n-1}{r}\partial_r f.$$

Si f est harmonique, sa dérivée par rapport à r résout l'EDO $\partial_r(\partial_r f) = -\frac{n-1}{r}\partial_r f$, donc $\partial_r f(r) = \frac{c}{r^{n-1}}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(0,R)$, on doit avoir $c=0$, ainsi $f(r)$ est constante.

- avec le principe du maximum. Comme f est harmonique sur $B(0,R)$, son maximum et son minimum sont atteints sur le bord de $B(0,R)$:

$$\forall x \in B(0,R), \quad \min_{y\in\partial B(0,R)} f(y) \le f(x) \le \max_{y\in\partial B(0,R)} f(y).$$

La fonction f étant radiale, f est constante sur le bord, ainsi f est constante dans l'intérieur.

4. *On se donne une suite de fonctions harmoniques $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction u dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, il existe $\tilde{u}$ harmonique telle que $\tilde{u} = u$ presque partout, et la suite converge vers $\tilde{u}$ dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

On a que la suite (u_i) converge vers u dans L^1_{loc}, donc elle converge vers u au sens des distributions. Ainsi, la suite (Δu_i) converge vers Δu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc $\Delta u = 0$. La limite est donc identifiable à une fonction harmonique $\tilde{u}$, égale à u presque partout.

Soient à présent $x_0 \in \Omega$ et R telle que $\overline{B(x_0,2R)} \subset \Omega$. Pour tout i, $u_i - \tilde{u}$ est harmonique, donc on lui applique la proposition 5.1.12 du poly PDE pour obtenir que, pour tout $x \in B(x_0,R)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = k$ fixé,

$$|\partial_x^\alpha (u_i(x) - \tilde{u})(x)| \le \frac{C_k}{R^{n+k}}\|u_i - \tilde{u}\|_{L^1(B(x,R))} \le \frac{C_k}{R^{n+k}}\|u_i - \tilde{u}\|_{L^1(B(x_0,2R))},$$

où le membre de droite ne dépend pas de $x \in B(x_0,R)$, donc, en prenant le sup en x de l'inégalité, on a bien convergence $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(x_0,R)$.

Pour conclure, une petite question subsidiaire de topologie: pourquoi le fait d'avoir montré qu'on a convergence uniforme sur les boules $B(x_0,R)$ telles que $\overline{B(x_0,2R)} \subset \Omega$ est-il suffisant pour avoir la convergence uniforme sur tout compact de Ω?

5. *Montrer qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$, bornée est constante. Donner des exemples de fonctions harmoniques sur le complémentaire d'un compact qui sont bornées.*

Pour montrer qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^n$ bornée est constante, on peut soit utiliser le contrôle des dérivées sur une boule, comme ci-dessus, et faire tendre le rayon vers l'infini (théorème 5.1.13 du poly PDE), soit utiliser le fait qu'une telle fonction définit une distribution tempérée dont le support de la transformée de Fourier est réduit à 0 (voir Contrôle 2 bis).

Pour un contre-exemple sur le complémentaire d'un compact, remarquons que les solutions fondamentales du laplacien sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $B(0,\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et tendent vers 0 à l'infini.

Exercice 2 *Noyau de Poisson sur la boule unité*

Soit, pour $x \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$ et $y \in S(0,1)$, $K(x,y) := \dfrac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|}\dfrac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$.

1. *Montrer que pour tout $y \in \mathbb{S}_{n-1}$, $K(\cdot, y)$ est harmonique sur $B(0,1)$.*

Comme $y \in \mathbb{S}_{n-1}$, $x \mapsto K(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $B(0,1)$, et on calcule son laplacien. En notant que $\nabla_x |x-y|^\alpha = \alpha |x-y|^{\alpha-2}(x-y)$, on a

$$\begin{aligned}
\nabla_x K(x,y) &= \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|}\left(\frac{-2x}{|x-y|^n} - \frac{n(1-|x|^2)(x-y)}{|x-y|^{n+2}}\right), \\
\text{et} \quad |\mathbb{S}_{n-1}|\Delta_x K(x,y) &= \frac{-2n}{|x-y|^n} + \frac{2nx\cdot(x-y)}{|x-y|^{n+2}} - \frac{n^2(1-|x|^2)}{|x-y|^{n+2}} \\
&\quad + \frac{2n(x-y)\cdot x}{|x-y|^{n+2}} + \frac{n(n+2)(1-|x|^2)|x-y|^2}{|x-y|^{n+4}} \\
&= \frac{-2n|x-y|^2 + 4n|x|^2 - 4ny\cdot x + 2n(1-|x|^2)}{|x-y|^{n+2}}.
\end{aligned}$$

En développant $|x-y|^2$ dans le premier terme, et en notant que $|y|^2 = 1$, on arrive bien à $\Delta_x K(x,y) = 0$.

2. *Montrer que, pour tout $x \in B(0,1)$, $\int_{\mathbb{S}_{n-1}} K(x,y)\ d\sigma(y) = 1$.*

Notons $g(x) = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} K(x,y)\ d\sigma(y)$. Pour $x \in B(0,1)$ fixé, $y \mapsto K(x,y)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de la sphère, qui est compacte, donc g est également de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a $\Delta g(x) = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} \Delta_x K(x,y)\ d\sigma(y) = 0$.

De plus, f est radiale, donc d'après la question 3 de l'exercice 1, f est constante, égale à

$$g(0) = \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|}\int_{\mathbb{S}_{n-1}} \frac{1}{|y|^n}\ d\sigma(y) = 1.$$

En effet, si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $g(Ax) = \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|}\int_{\mathbb{S}_{n-1}} \frac{1-|Ax|^2}{|Ax-y|^n}\ d\sigma(y)$. En posant $y = Az$, on arrive à

$$g(Ax) = \frac{1}{|\mathbb{S}_{n-1}|}\int_{\mathbb{S}_{n-1}} \frac{1-|Ax|^2}{|A(x-z)|^n}\ d\sigma(z) = g(x)$$

vu que A est une isométrie ($|Au| = |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$).

3. *Montrer que, si f est continue sur $\mathbb{S}_{n-1}$, alors $\int_{\mathbb{S}_{n-1}} K(\cdot,y)f(y)d\sigma(y)$ est un prolongement continu de f à la boule unité fermée.*

Soit $h(x)$ la fonction proposée. Elle est clairement définie et harmonique sur $B(0,1)$. Le but est de montrer que, pour $x_0 \in \mathbb{S}_{n-1}$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = f(x_0)$. Comme $y \mapsto K(x,y)$ est d'intégrale 1 sur la sphère pour $x \in B(0,1)$, on a

$$h(x) - f(x_0) = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} K(x,y)(f(y) - f(x_0))\ d\sigma(y).$$

Soient à présent $\varepsilon > 0$, et $\eta > 0$ de sorte que $|y - x_0| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. On découpe l'intégrale ci-dessus en deux morceaux: si $S_\eta = \mathbb{S}_{n-1} \cap B(x_0, \eta)$ et C_η le complémentaire de S_η dans $\mathbb{S}_{n-1}$, on a que la partie intégrale sur S_η est petite, et il reste à étudier $\int_{C_\eta} K(x,y)(f(y) - f(x_0))\, d\sigma(y)$. Sur C_η, on borne $|f|$ par $\|f\|_\infty$, et on ramène à regarder $K(x,y)$ pour x proche de x_0, et y loin de x_0.

On considère donc $x \in B(0,1)$ tel que $|x - x_0| \leq \frac{\eta}{2} \leq \frac{1}{2}|y - x_0|$, ainsi

$$|x - y| \geq |y - x_0| - |x_0 - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0| \geq \eta \text{ sur } C_\eta.$$

De plus, on a $|1 - |x|^2| = ||x_0|^2 - |x|^2| = |(x_0 + x) \cdot (x_0 - x)| \leq 2|x_0 - x|$, donc

$$\left| \int_{C_\eta} K(x,y)(f(y) - f(x_0))\, d\sigma(y) \right| \leq \frac{2^{n+2}\|f\|_\infty |C_\eta|}{\eta^n} |x_0 - x|.$$

Enfin, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta \leq \frac{\eta}{2}$, cette quantité est inférieure à ε, donc le fait que h soit un prolongement continu de f est démontré.

II. Equation des ondes

Exercice 3 *Formule de d'Alembert*

Soient f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'équation $(\partial_t^2 - c^2\Delta)u = 0$ dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, avec les données initiales $u|_{t=0} = f$ et $\partial_t u|_{t=0} = g$, admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. On donnera une formule explicite pour u en dimension 1.

Prenons la transformée de Fourier partielle de l'équation: on se ramène à résoudre l'EDO de variable ξ

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(t,\xi) &= -4\pi^2 c^2 |\xi|^2 \hat{u}(t,\xi) \\ \hat{u}|_{t=0} &= \hat{f}(\xi) \\ \partial_t \hat{u}|_{t=0} &= \hat{g}(\xi). \end{cases}$$

Cette équation se résout directement:

$$\hat{u}(t,\xi) = \cos(2c\pi|\xi|t)\hat{f}(\xi) + \frac{\sin(2c\pi|\xi|t)}{2c\pi|\xi|}\hat{g}(\xi).$$

En repassant à la transformée de Fourier inverse, on a

$$u(t,x) = (\mathcal{F}^{-1}(\cos(2c\pi|\xi|t)) * f)(x) + \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(2c\pi|\xi|t)}{2c\pi|\xi|} \right) * g \right)(x),$$

où, les fonctions cos et sinc étant bornées, les transformées de Fourier inverses sont des éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, donc la convolution avec f et g, qui sont de classe Schwartz, donne des fonctions de classe Schwartz. Par bijectivité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la solution exhibée ici est bien unique.

Donnons la formule de $u(t,x)$ en dimension 1. Dans les exercices 1 et 4 de la feuille 5, on a obtenu les transformées de Fourier de cos et sinc, ainsi on arrive à

$$u(t,x) = \frac{1}{2}((\delta_{-ct} + \delta_{ct}) * f)(x) + \frac{1}{2c}(\mathbf{1}_{[-ct,ct]} * g)(x).$$

Explicitons ces convolutions. D'une part,

$$< \delta_a * f, \varphi >=< f(y), < \delta_{x=a}, \varphi(x+y) >>= \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(a+y)\ dy,$$

donc $(\delta_{ct} + \delta_{-ct}) * f$ s'identifie à la fonction $f(x+ct) + f(x-ct)$. D'autre part, nous avons vu à l'exercice 5 de la feuille 4 (question 2) que

$$(\mathbf{1}_{[-ct,ct]} * g)(x) = \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\ dy.$$

La formule de d'Alembert s'énonce donc: pour $f,\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fonction

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\ dy$$

est l'unique solution de l'équation des ondes avec données initiales $(u, \partial_t u)|_{t=0} = (f,g)$. Remarquons que u est somme de deux ondes progressives: $u(t,x) = u^-(x+ct) + u^+(x-ct)$, où

$$u^-(z) = \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2c}\int_0^z g(y)\ dy \quad \text{et} \quad u^+(z) = \frac{1}{2}f(z) - \frac{1}{2c}\int_0^z g(y)\ dy.$$

On aura l'occasion de retrouver cette formule d'une autre manière sur la feuille de révisions.

Exercice 4 *Formule de Kirchhoff avec les moyennes sphériques*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. On définit la valeur moyenne de f sur la sphère $\partial B(x,r)$ par

$$M(f,x,r) = |\mathbb{S}_{n-1}|^{-1} \int_{y \in \mathbb{S}_{n-1}} f(x+ry)\ d\sigma(y).$$

1. (a) *Montrer que $x \mapsto M(f,0,|x|)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, radiale.*

Notons $m(x) = M(f,0,|x|)$. Le caractère radial de m ne fait aucun doute. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^n$, on a $|f(y)| \leq M_R$ pour $y \in B(0,R)$, ainsi on démontre facilement que la fonction $x \mapsto M(f,0,|x|)$ est continue sur $B(0,R)$, pour tout R.

Pour montrer que m est de classe $\mathcal{C}^2$, on va appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale. Pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$, on a

$$\partial_{x_i}(f(|x|y)) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(|x|y)\partial_{x_i}(|x|y_j) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(|x|y) y_j \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{|x|}\nabla f(|x|y)\cdot y.$$

On peut alors appliquer le théorème de Stokes, puisque y est la normale extérieure à la sphère unité au point y, soit

$$\int_{\mathbb{S}_{n-1}} \nabla f(|x|y)\cdot y\ d\sigma(y) = \int_{B(0,1)} \mathrm{div}_y\ [(\nabla f)(|x|y)]\ dy = |x| \int_{B(0,1)} \Delta f(|x|y)\ dy.$$

Ainsi, $\int_{\mathbb{S}_{n-1}} \partial_{x_i} f(|x|y)\ d\sigma(y) = x_i \int_{B(0,1)} \Delta f(|x|y)\ dy$, et $y \mapsto x_i \Delta f(|x|y)$ admet une borne uniforme intégrable pour $x \in B(0,R)$ comme ci-dessus. On obtient que m est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

On applique le même raisonnement aux dérivées de m: calculons $\partial_{x_k}(x_i \Delta f(|x|y))$. On a $\partial_{x_k} x_i = \delta_{i,j}$, d'où

$$\partial_{x_k}(x_i \Delta f(|x|y)) = \delta_{i,j} \Delta f(|x|y) + \frac{x_i x_k}{|x|} (\nabla \Delta f)(|x|y) \cdot y.$$

La fonction $x \mapsto \frac{x_i x_k}{|x|}$ étant continue, on peut à nouveau appliquer le théorème de dérivabilité pour $x \in B(0,R)$ et conclure que m est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

(b) *Montrer que son développement de Taylor en l'origine ne contient que des termes en $|x|^2$.*

D'après la question précédente, on a $\partial_{x_i} m(0) = 0$, $\partial^2_{x_i,x_j} m(0) = 0$ si $i \neq j$, et

$$\partial^2_{x_i} m(0) = \Delta f(0) \frac{|B(0,1)|}{|\mathbb{S}_{n-1}|} = \frac{\Delta f(0)}{n}$$

d'après la formule de Stokes. Enfin, remarquons que $m(0) = f(0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} m(x) &= m(0) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} m(0) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial^2_{x_i,x_j} m(0) x_i x_j + o(|x|^2) \\ &= f(0) + \frac{1}{2n} \Delta f(0) \sum_{i=1}^n x_i^2 + o(|x|^2) = f(0) + \frac{1}{2n} \Delta f(0) |x|^2 + o(|x|^2). \end{aligned}$$

(c) *Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Montrer que* $\lim_{r \to 0} \frac{M(u,x,r) - u(x)}{r^2} = \frac{\Delta u(x)}{2n}$.

Les calculs ci-dessus ne dépendant pas du centre de la boule où on intègre, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le développement limité

$$M(u,x,r) = u(x) + \frac{1}{2n} \Delta u(x) r^2 + o(r^2).$$

Il suffit de rassembler $\frac{M(u,x,r)-u(x)}{r^2}$ dans cette expression et faire tendre r vers 0 pour obtenir le résultat.

2. (a) *Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ on a $M(\Delta f, 0, r) = \Delta_x M(f, 0, r)$.*

On applique simplement le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre.

(b) *Montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$ vérifie $\Box u = (\partial_t^2 - \Delta) u = 0$ alors la fonction $v(t,r) := rM(u(t), 0, |r|)$ vérifie, pour tout $r \in \mathbb{R}$:*

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2) v = 0.$$

D'après les questions précédentes, la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De même que ci-dessus, il est clair que $\partial_t^2 v(t,r) = rM(\partial_t^2 u(t), 0, |r|)$. Calculons $\partial_r^2 v$: par la formule de Leibniz,

$$\partial_r^2 v(t,r) = 2\partial_r M(u(t), 0, |r|) + r\partial_r^2 M(u(t), 0, |r|).$$

En reprenant la question 1.(a), on a que

$$\partial_r M(u(t),0,|r|) = \frac{|r|}{|\mathbb{S}_2|}\int_{B(0,1)} \Delta u(t,|r|y)\ dy.$$

En dérivant à nouveau, on a

$$r\partial_r^2 v(t,r) = \partial_r M(u(t),0,|r|) + \frac{|r|}{|\mathbb{S}_2|}\int_{B(0,1)} y\cdot\nabla\Delta u(t,|r|y)\ dy.$$

La formule de Stokes sur le deuxième terme donne

$$\begin{aligned}\int_{B(0,1)} y\cdot\nabla\Delta u(t,|r|y)\ dy &= -\int_{B(0,1)} \operatorname{div}\, y\Delta u(t,|r|y)\ dy + \int_{\mathbb{S}_2}\Delta u(t,|r|y)\ d\sigma(y),\\ \text{d'où}\ \ r\partial_r^2 M(u(t),0,|r|) &= -2\partial_r M(u(t),0,|r|) + rM(\Delta u,0,|r|).\end{aligned}$$

L'application $f\mapsto M(f,x,r)$ est bien sûr linéaire, donc on arrive à

$$(\partial_t^2-\partial_r^2)v(t,r) = rM(\Box u,0,|r|) = 0.$$

(c) *En déduire la formule de Kirchhoff: dans $\mathbb{R}^3$, la solution de l'équation des ondes $\Box u = 0$ avec condition initiale $(u,\partial_t u)|_{t=0} = (f,g)$ s'écrit*

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t} f(y)\ d\sigma(y)\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|y-x|=t} g(y)\ d\sigma(y).$$

La fonction v résout l'équation des ondes 1D, avec les données initiales

$$(v,\partial_t v)|_{t=0} = (rM(f,x,r), rM(g,x,r)),$$

donc on peut appliquer la formule de d'Alembert (exercice 3):

$$v(t,r) = \frac{1}{2}\left[(r-t)M(f,x,r-t)+(r+t)M(f,x,r+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} sM(g,x,s)\ ds.$$

On divise par r et on fait tendre r vers 0: à gauche, on obtient $u(t,x)$ à la limite, tandis qu'à droite on reconnaît des taux d'accroissement en r, ainsi

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(tM(f,x,t)) + tM(g,x,t).$$

Or, $M(f,x,t) = \frac{1}{|\mathbb{S}_2|t^2}\int_{|y-x|=t} f(y)\ d\sigma(y)$, d'où la formule de Kirchhoff.

(d) *Utiliser la formule de Kirchhoff pour obtenir la forme des solutions de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$.*

On remarque que, si $u(t,x)$ est solution de l'équation des ondes 3D, alors une solution de l'équation des ondes 2D est donnée par $w(t,x_1,x_2) = u(t,x_1,x_2,0)$, ainsi on peut utiliser la formule de Kirchhoff pour exprimer w. Cette technique est appelée *méthode de descente*.

Dans la suite, x et y sont des variables 2D, et on note $\tilde{x} = (x, 0)$ et on pose $\tilde{y} = (y, y_3) \in S(x,t)$ dans les intégrales. On a donc

$$w(t,x) = u(t,\tilde{x}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{|\tilde{y}-\tilde{x}|=t} f(\tilde{y})\, d\sigma(\tilde{y})\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{|\tilde{y}-\tilde{x}|=t} g(\tilde{y})\, d\sigma(y).$$

Pour ramener les intégrales à deux variables, on écrit que $y_3 = \sqrt{t^2 - |y-x|^2}$, ainsi, par exemple,

$$\int_{|\tilde{y}-\tilde{x}|=t} f(\tilde{y})\, d\sigma(\tilde{y}) = 2\int_{|y-x|<t} \frac{f(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy,$$

ce qui permet d'obtenir la formule de Poisson:

$$w(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|<t} \frac{f(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|<t} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy.$$

Remarque: dans toutes ces formules (d'Alembert, Kirchhoff et Poisson), on voit comment interviennent les solutions fondamentales calculées dans le poly PDE dans un contexte de problème de Cauchy.

III. Problème de Dirichlet dans le demi-espace et équation des ondes

Problème

1. *Soit $\beta > 0$. Montrer que*

$$e^{-\beta} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\, dx.$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{e^{i\beta x}}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec deux pôles simples en $\pm i$. Pour calculer $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 2\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\, dx$, on considère la limite quand R tend vers l'infini de l'intégrale sur le demi-cercle supérieur centré en 0 et de rayon R, que l'on note $\mathcal{C}_R$. Le seul pôle inclus dans ce contour est $+i$, et le résidu de f en ce point est

$$[(z-i)f(z)]|_{z=i} = \left[\frac{e^{i\beta z}}{z+i}\right]\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-\beta}}{2i},$$

d'où $\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz = \pi e^{-\beta}$. Il reste à démontrer que l'intégrale sur γ_R, la partie semi-circulaire, tend vers 0. On paramétrise pour écrire

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\, dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{i\beta R e^{i\theta}}}{1+R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}\, d\theta\right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{Re^{-\beta R\sin(\theta)}}{|R^2 e^{2i\theta}| - 1}\, d\theta \leq \frac{R\pi}{R^2-1} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

2. *Utilisant que* $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x^2)u}\,du$, *en déduire l'identité de subordination*

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}}\,du.$$

On insère l'expression de $\frac{1}{1+x^2}$ proposée dans l'égalité de la question 1, et on peut utiliser le théorème de Fubini pour intervertir les intégrales, puisque

$$[(x,u) \mapsto \cos(\beta x) e^{-(1+x^2)u}] \in L^1((\mathbb{R}^+)^2) :$$

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u} \int_0^{+\infty} \cos(\beta x) e^{-ux^2}\,dx\,du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta x - ux^2}\,dx\,du \end{aligned}$$

en utilisant l'expression du cosinus. Le changement de variable $y = \sqrt{\frac{u}{\pi}}x$ permet de reconnaître dans l'intégrale la transformée de Fourier de $y \mapsto e^{-\pi y^2}$ au point $\frac{-\beta}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{u}}$, soit

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-u} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\pi \frac{\beta^2}{4\pi u}}\,du,$$

qui est bien l'égalité souhaitée.

3. *En déduire, pour* $y > 0$ *et* $\zeta \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(e^{-y|x|})(\zeta) = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{y}{(y^2 + 4\pi^2|\zeta|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Comme $[x \mapsto e^{-y|x|}] \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est donnée par la formule intégrale, et on applique l'égalité précédente à $\beta = y|x|$:

$$\mathcal{F}(e^{-y|x|})(\zeta) = \int_{\mathbb{R}}^n e^{-2i\pi\zeta\cdot x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{y^2|x|^2}{4u}}\,du\,dx.$$

Une nouvelle fois, on peut intervertir les intégrales et faire le changement $z = \frac{y}{\sqrt{4\pi u}}x$ (attention à la puissance n de $\frac{\sqrt{4\pi u}}{y}$ dans le jacobien!) pour reconnaître la transformée de Fourier de $z \mapsto e^{-\pi|z|^2}$, et ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-y|x|})(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\frac{4\pi u}{y^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \mathcal{F}(e^{-\pi|z|^2}) \left(\zeta \sqrt{\frac{4\pi u}{y^2}}\right)\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{4\pi}{y^2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-u(1+\frac{4\pi^2|\zeta|^2}{y^2})} u^{\frac{n-1}{2}}\,du. \end{aligned}$$

Un nouveau changement de variable $s = u(1 + \frac{4\pi^2|\zeta|^2}{y^2})$ permet d'écrire

$$\mathcal{F}(e^{-y|x|})(\zeta) = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{y}{(y^2)^{(n+1)/2}(1 + \frac{4\pi^2}{y^2}|\zeta|^2)^{1+(n-1)/2}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n-1}{2}}\,ds,$$

ce qui est bien le résultat voulu.

4. *Montrer que pour* $\mathrm{Re}\,(y) > 0$*, on a*

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\zeta|})(x) = 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{y}{(y^2 + 4\pi^2|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

On procède par prolongement analytique. On remarque que la fonction $y \mapsto e^{-y|x|}$ est holomorphe sur le demi-plan droit $P^+ = \{y \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(y) > 0\}$, et on peut appliquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale pour affirmer que $y \mapsto \mathcal{F}(e^{-y|x|})(\zeta)$ est également holomorphe sur P^+. Il résulte que l'égalité de la question précédente reste vraie pour $y \in P^+$, et on utilise que $\mathcal{F}^{-1}f = \check{\hat{f}}$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

5. *En déduire le noyau de Poisson pour le problème de Dirichlet dans le demi-espace :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta u & = & 0 \ \text{sur} \ \mathbb{R}^n_+ \\ u(x', 0) & = & g(x') \ \text{sur} \ \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \right.$$

Rappelons que $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$. On résout pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_+)$, donc on fait une transformée de Fourier partielle sur les $n-1$ premières variables: on se ramène à résoudre l'EDO

$$\partial^2_{x_n} \hat{u}(\zeta, x_n) - 4\pi^2|\zeta|^2 \hat{u}(\zeta, x_n) = 0$$

avec les conditions $\hat{u}(\zeta, 0) = \hat{g}(\zeta)$ et $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_+)$. On a alors

$$\hat{u}(\zeta, x_n) = e^{-2\pi x_n|\zeta|}\hat{g}(\zeta),$$

donc $u(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi x_n|\zeta|})(x') * g(x')$. D'après la question précédente avec $y = 2\pi x_n$, le noyau de Poisson est donné par

$$\begin{array}{rcl} E(x', x_n) & = & 2^{n-1}\pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \dfrac{2\pi x_n}{((2\pi x_n)^2 + 4\pi^2|x'|^2)^{\frac{n}{2}}} = (2\sqrt{\pi})^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \dfrac{x_n}{(2\pi|x|)^n} \\ & = & \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}) x_n}{\pi^{\frac{n}{2}} |x|^n} \end{array}$$

6. *On suppose* $n \geq 2$*. En écrivant que pour* $\varepsilon > 0$*,*

$$\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|} e^{-\varepsilon|\zeta|} = \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon - it}^{\varepsilon + it} e^{-s|\zeta|} \, ds,$$

montrer que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1-n} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \mathrm{Im}\, \frac{1}{(4\pi^2|x|^2 - (t - i\varepsilon)^2)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Au sens des distributions tempérées , on a que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|} e^{-\varepsilon|\zeta}\right),$$

donc en utilisant l'écriture de $\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}$ proposée - qui, en passant, n'est pas compliquée à montrer -, on peut intervertir les intégrales (car la transformée de Fourier inverse de $\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}e^{-\varepsilon|\zeta|}$ est donnée par une formule intégrale) pour écrire que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}e^{-\varepsilon|\zeta|}\right)(x) &= \frac{1}{2i}\mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it} e^{-s|\zeta|}\ ds\right)(x)\\ &= \frac{1}{2i}\int_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it} \mathcal{F}^{-1}(e^{-s|\zeta|})(x)\ ds.\end{aligned}$$

On peut ainsi réutiliser la formule de la question 4 pour écrire

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it} \mathcal{F}^{-1}(e^{-s|\zeta|})(x)\ ds &= \int_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it} 2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{s}{(s^2+4\pi|x|^2)^{(n+1)/2}}\ ds\\ &= 2^n\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{-1}{(n-1)(s^2+4\pi^2|x|^2)^{(n-1)/2}}\right]_{\varepsilon-it}^{\varepsilon+it}\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise que $\frac{a-\bar{a}}{2i} = \mathrm{Im}\,(a)$ pour $a \in \mathbb{C}$.

7. *En déduire que $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}\right)$ est supporté dans la boule fermée de rayon ct, où $c > 0$ à préciser, et que, si $n \geq 3$ est impair, alors cette distribution est supportée dans la sphère de rayon ct.*

Si on a $4\pi^2|x|^2 - t^2 > 0$, alors la limite quand ε tend vers 0 de $(4\pi^2|x|^2 - (t-i\varepsilon)^2)^{(n-1)/2}$ est un réel positif, donc $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}\right)(x)$ est nul lorsque $|x| > \frac{t}{2\pi}$.

Si n est impair, on a $\frac{n-1}{2} = k$ entier, et, lorsque $4\pi^2|x|^2 - t^2 \neq 0$, à nouveau la suite de complexes $[(4\pi^2|x|^2 - (t-i\varepsilon)^2)^k]_{\varepsilon>0}$ tend vers un réel quand ε tend vers 0. Ainsi $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}\right)(x)$ est nul lorsque $|x| \neq \frac{t}{2\pi}$.

8. *Calculer cette limite pour $n = 2$.*

On veut calculer $4\sqrt{\pi}\Gamma\,(3/2) \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2|x|^2 - t^2 + \varepsilon^2 + 2i\varepsilon t}}\right)$. Rappelons qu'en dehors de la boule $\{|x| \leq \frac{t}{2\pi}\}$, on a déjà établi que cette limite était nulle.

Soit donc (t, x) de sorte que $|x| \leq \frac{t}{2\pi}$. Le nombre limite de $4\pi^2 - t^2 + \varepsilon^2 + 2i\varepsilon t$ est donc un réel négatif, qu'on approche par valeurs de partie imaginaire positive. Pour la détermination principale de la racine carrée (l'argument tend vers $+\frac{\pi}{2}$), on a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2|x|^2 - t^2 + \varepsilon^2 + 2i\varepsilon t}}\right) = +\frac{1}{\sqrt{t^2 - 4\pi^2|x|^2}}.$$

En remarquant que $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on aboutit à

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(t|\zeta|)}{|\zeta|}\right)(x) = 2\pi\frac{H(t^2 - 4\pi^2|x|^2)}{\sqrt{t^2 - 4\pi^2|x|^2}}.$$

UPMC, Master 1 Mathématiques, année 2014-2015
UE 4M046: Equations aux Dérivées Partielles

Indications pour le TD de révision

Exercice 1 *Equation des ondes résolue avec des caractéristiques*

On rappelle l'équation des cordes vibrantes sur $\mathbb{R}$*:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u & = & 0 \\ u|_{t=0} & = & u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} & = & v_0. \end{array}\right. \tag{1}$$

1. *Écrire le problème (1) sous la forme d'un système du premier ordre,*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t U & = & M \partial_x U \\ U|_{t=0} & = & U_0, \end{array}\right. \tag{2}$$

avec M *une matrice* 2×2 *à expliciter.*

La variable et la matrice en jeu sont $U = (\partial_t u, c\partial_x u)$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

2. *Diagonaliser* M *pour faire apparaître (2) comme un système d'équations de transport couplées.*

Les valeurs propres sont $+c$ et $-c$, et la matrice de passage pour diagonaliser M est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On obtient $\partial_t(PU) = \mathrm{diag}(c, -c)\partial_x(PU)$, c'est-à-dire deux équations de transport indépendantes, de donnée initiale $PU(0)$.

3. *Résoudre ce système avec la méthode des caractéristiques et retrouver la formule de d'Alembert.*

On trouve $(PU)_1(t,x) = (PU)_1(0, x+ct)$ et $(PU)_2(t,x) = (PU)_2(0, x-ct)$. Pour retrouver la formule de d'Alembert, il suffit d'appliquer P^{-1} et d'examiner la première composante, qui décrit $\partial_t u$.

4. *Si on modifie* (u_0, v_0) *dans un intervalle* $[a, b]$*, où la solution de (1) sera-t-elle modifiée?*

De même, si on veut modifier $u(t)$ *au voisinage d'un point* x_0*, où doit-on modifier la donnée initiale?*

Regarder les cônes de dépendance.

Exercice 2 *Manipulation des distributions (questions indépendantes)*

1. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, a-t-on équivalence ou une seule implication entre les propositions* (a) $< T, \varphi >= 0$ *et* (b) $\varphi \cdot T = 0$?

(b) $\Rightarrow$ (a) est vrai: la distribution $\varphi \cdot T \in \mathcal{E}'$ et peut être testée contre 1.

La réciproque est fausse: prendre $T = \mathbf{1}_{[-1,1]}$ et φ impaire.

2. *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur cette suite peut-on affirmer que la série $\sum_{k\geq 0} a_k\delta_k$ converge:*

- *dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?* Aucune contrainte.
- *dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?* Contrainte de croissance.
- *dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$?* La suite (a_k) doit stationner à 0 à partir d'un certain rang.

3. *Existe-t-il des distributions sur* $]0, 1[$ *qui sont d'ordre infini?*

Comme sur $\mathbb{R}$, penser à une série de dérivées successives de Dirac.

4. *Justifier que les quantités ci-après sont bien définies et sont égales:*

$$< \{a, u\}, \varphi > \quad \text{et} \quad < u, \{a, \varphi\} > .$$

Le crochet de Poisson $\{a, u\}$ est bien défini au sens des distributions car ∇a est $\mathcal{C}^\infty$. L'égalité est le résultat de manipulations simples.

Exercice 3 *Pseudo-mesures*

On dit que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une pseudo-mesure si $\hat{T} \in L^\infty(\mathbb{R})$.

1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que T_f est une pseudo-mesure.*

D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $\hat{f}$ est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini.

2. *Soit u la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$. En écrivant l'équation différentielle satisfaite par $\hat{u}$, montrer que T_u est une pseudo-mesure.*

On a $u'(x) = 2ixe^{ix^2}$, et, en passant à la transformée de Fourier, on trouve que $\hat{u}$ résout le même type d'équation.

3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 1$. Montrer que T est une pseudo-mesure.*

Les solutions de l'équation sont connues et effectivement tempérées. Ensuite, la transformée de Fourier de T satisfait $\frac{-1}{2i\pi}(\hat{T})' = \delta_0$, ainsi T est une fonction constante par morceaux.

4. *Montrer que toute distribution à support compact et d'ordre 0 est une pseudo-mesure.*

La transformée de Fourier d'une telle distribution u est une fonction analytique sur $\mathbb{R}$, donc une fonction L^1_{loc}. Comme u est d'ordre 0 et à support compact, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)\psi(\xi)\ d\xi \right| = | < u, \hat{\psi} > | \leq C\|\hat{\psi}\|_{L^\infty} \leq C\|\psi\|_{L^1}.$$

Considérer ensuite une suite $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui approche $\text{sgn}(\hat{u})\mathbf{1}_{[a,b]}$ dans L^1. Alors, on a

$$\int_a^b |\hat{u}(\xi)|\ d\xi \leq C|b-a|,$$

pour tout $a < b$, ce qui n'est possible que si $\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq C$ (pour le voir, raisonner par l'absurde).

Exercice 4 *Transformée de Fourier et distributions tempérées (questions indépendantes)*

1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x^k f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.*

Théorème de dérivation sous l'intégrale.

2. *La fonction $x \mapsto ie^x e^{ie^x}$ est-elle associée à une distribution tempérée?*

C'est la dérivée de $x \mapsto e^{ie^x}$, qui est tempérée.

3. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ résolvant l'équation de la chaleur $(\partial_t - \Delta)T = 0$. Montrer que, si $\text{supp}(T) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, alors $T = 0$.*

Soit $\hat{T}$ la transformée de Fourier partielle (en x) de T. On a alors $\partial_t(e^{4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{T}) = 0$, donc $e^{4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{T}(\xi) = c(\xi)$, où $c \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Comme $\text{supp}(\hat{T}) \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, on doit avoir $c = 0$, car $e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \neq 0$ pour tout (t, ξ).

4. (a) *À quelle condition sur $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ existe-t-il $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $u = u * f$?*

Déjà, u est nécessairement dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puisque la convolution $u * f$ l'est. Ensuite, l'égalité $\hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{f}(\xi)$ implique que $\hat{f}(\xi) = 1$ sur le support de $\hat{u}$. Pour que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il faut donc que $\hat{u}$ soit à support compact.

(b) *À quelle condition sur $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existe-t-il $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $u - u * f = f$?*

On trouve $\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1-\hat{f}(\xi)}$. La décroissance rapide est assurée, de même que le caractère $\mathcal{C}^\infty$ tant que $\|\hat{f}\|_{L^\infty} < 1$, et pour cela, il faut $\|f\|_{L^1} < 1$.

5. *Suite du CC2: calculer la transformée de Fourier de x_+^α pour $\alpha > -1$.*

On prend la limite ponctuelle (et donc L^1_{loc} et donc au sens des distributions), lorsque $\lambda \to 0$, de la transformée de Fourier de $H^\lambda_{\alpha+1}$ définie dans le contrôle. On aboutit à

$$\mathcal{F}(x_+^\alpha)(\xi) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2i\pi)^{\alpha+1}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{(\xi - i\varepsilon)^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2\pi)^{\alpha+1}e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha+1)}} \frac{1}{(\xi - i0)^{\alpha+1}}.$$

Exercice 5 *Un peu de cartographie*

Quelques éléments:

- $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}^\infty_\omega = \{0\}$ (TD2), donc $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}^\infty_\omega$, tous deux inclus dans $\mathcal{C}^\infty$, ne sont pas comparables.
- Pour $p < q$, on a $L^q_{\text{loc}} \subset L^p_{\text{loc}}$, mais les espaces $L^p(\mathbb{R})$ ne sont pas comparables entre eux.
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est inclus dans l'espace des distributions d'ordre fini.
- Ni C^∞, ni L^1_{loc} ne sont inclus dans $\mathcal{S}'$ (TD5).
- $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*)$ n'est pas inclus dans L^∞, L^1_{loc} ou $\mathcal{D}'$ (fonction $\frac{1}{x}$).